Розділ 7

ВИЗНАЧЕНИЙ ІНТЕГРАЛ

7.1. Означення, властивості, геометричний зміст визначеного інтеграла

До поняття визначеного інтеграла приводять задачі обчислення площ, об'ємів тіл, довжини дуги кривої, фізичні задачі.

Нехай на відрізку $[a,b]$ визначена функція $y=f(x)$. Розіб'ємо відрізок на n частин точками $a=x_0<x_1<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$.

На кожному з відрізків $[x_{i-1},x_i]$ візьмемо довільну точку ξ_i й складемо суму $S_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, що називається *інтегральною сумою*.

Якщо існує скінченна границя інтегральної суми S_n при $\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta x_i\}\to 0$, що не залежить від способу розбивки області на елементарні ділянки й вибору точок , то вона називається *визначеним інтегралом* функції $f(x)$ на відрізку $[a,b]$ й позначається

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\ .$$

Функція $f(x)$ у цьому випадку називається інтегровною на відрізку $[a,b]$.

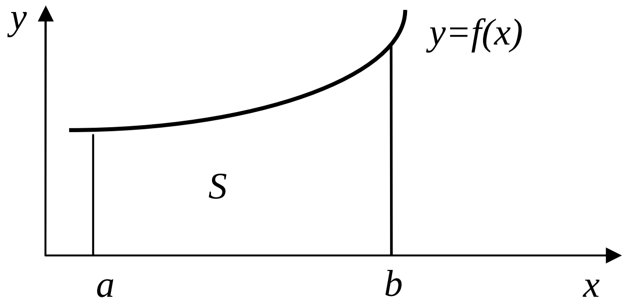

Рис. 7.1

Геометричний зміст визначеного інтеграла: якщо $f(x)\ge 0\quad \forall x\in[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx$ чисельно дорівнює площі криволінійної трапеції з основою $[a,b]$, обмеженої прямими $x=a$, $x=b$ і кривою $y=f(x)$ (рис. 7.1).

Властивості визначеного інтеграла.

1. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$.

2. $\int_a^a f(x)dx=0$.

3. *Лінійність* інтеграла. Якщо $f(x)$ й $g(x)$ – функції, інтегровні на $[a,b]$, то

а) $\int_a^b cf(x)dx=c\int_a^b f(x)dx,\ (c=const)$; б) $\int_a^b (f(x)\pm g(x))dx=\int_a^b f(x)dx\pm\int_a^b g(x)dx.$

Поєднуючи властивості а) і б), можна записати властивість лінійності визначеного інтеграла: $\int_a^b \left(c_1 f(x) + c_2 g(x)\right) dx = c_1 \int_a^b f(x)\,dx + c_2 \int_a^b g(x)\,dx.$

4. *Адитивність* інтеграла. Якщо $f(x)$ – функція інтегровна на $[a,c]$ й $[c,b]$, де $c \in (a,b)$, то вона інтегровна на *[a,b]* й

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

5. Якщо $a < b$ й $f(x) \geq 0$, те $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$, причому рівність нулю можлива тільки в тому випадку, коли $f(x) \equiv 0, \forall x \in (a,b)$.

6. Якщо $a < b$ й $f(x) \geq g(x)$, то $\int_a^b f(x)\,dx \geq \int_a^b g(x)\,dx$ – теорема про інтегрування нерівностей.

7. Якщо $f(x)$ – функція, інтегровна на *[a,b]*, то $|f(x)|$ – інтегровна на *[a,b]* і справедлива нерівність:

$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ – теорема про модуль визначеного інтеграла.

8. Теорема про оцінку визначеного інтеграла. Якщо $m \leq f(x) \leq M$, *m*– найменше, *M* – найбільше значення функції *f(x)* на відрізку *[a; b]*,то

$$m(в - a) \leq \int_a^в f(x)dx \leq M(в - a).$$

9. Теорема про середнє значення. Якщо $f(x)$ неперервна $\forall x \in [a,b]$, то

$\exists \xi \in (a,b)$, що $\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$

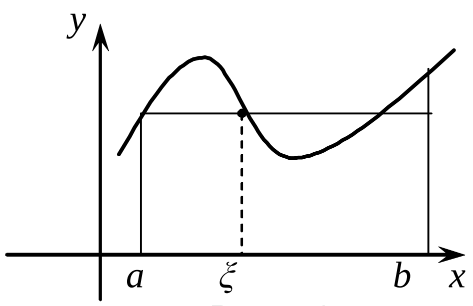

Рис. 7.2

Геометричний зміст теореми: нехай $f(x) \geq 0$ $\forall x \in [a,b]$, тоді існує принаймні одна точка $\xi \in (a,b)$, що площа криволінійної трапеції, обмеженої зверху неперервною кривою $y = f(x)$ буде рівна площі прямокутника з тією ж основою й висотою, рівною $f(\xi)$ (рис. 7.2). Значення $f(\xi)$ називається середнім значенням функції на відрізку *[a, b]*.

10. Якщо функції $f(x)$ й $\varphi(x)$ – неперервні на *[a, b]*, а $\varphi(x)$ зберігає знак на цьому відрізку, то (узагальнена теорема про середнє):

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = f(\xi)\int_a^b \varphi(x)\,dx, \quad a < \xi < b$$

11. Якщо неперервна функція $f(x)$, $x\in[-l,l]$ – парна, то $\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 2\int\limits_{0}^{l} f(x)dx$.

Якщо $f(x)$ – непарна, то $\int\limits_{-l}^{l} f(x)dx = 0$.

7.2. Методи обчислення визначеного інтеграла

Фундаментальним результатом математичного аналізу й поворотним моментом у розвитку інтегрального числення з'явилося відкриття зв'язку між визначеним і невизначеним інтегралами. Це дозволило визначені інтеграли обчислювати не як границі інтегральних сум, а через невизначені інтеграли.

Теорема. *Похідна визначеного інтеграла від неперервної функції по його верхній межі існує й дорівнює значенню підінтегральної функції у верхній межі, тобто*

$$\left(\int\limits_a^x f(t)dt\right)'_x = f(x).$$

Наприклад, а) $\left(\int\limits_0^x e^{-t^2}dt\right)'_x = e^{-x^2}$; б) $\left(\int\limits_x^0 \sqrt{\sin^3 t}\,dt\right)'_x = \left(-\int\limits_0^x \sqrt{\sin^3 t}\,dt\right)'_x = -\sqrt{\sin^3 x}$.

Формула Ньютона-Лейбніца: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a)$ – основна формула інтегрального числення, що встановлює зв'язок між визначеним і невизначеним інтегралами й дозволяє знаходити значення визначеного інтеграла як різницю значень первісної на верхній і нижній межах визначеного інтеграла.

Приклади.

Обчислити визначені інтеграли:

1. $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}} = \int\limits_1^e \frac{d(\ln x)}{\sqrt{1-\ln^2 x}} = \arcsin\ln x\Big|_1^e = \arcsin\ln e - \arcsin\ln 1 =$

$\arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2}.$

2. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\cos^3 x dx}{\sqrt[3]{\sin x}} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{(1-\sin^2 x)d(\sin x)}{(\sin x)^{\frac{1}{3}}} = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} (\sin x)^{-\frac{1}{3}} d(\sin x) - \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \sin^{\frac{5}{3}} x d(\sin x) =$

$\left(\frac{3}{2}(\sin x)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{8}\sin^{\frac{8}{3}} x\right)\Bigg|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} = \frac{3}{2}\left(\sin^{\frac{2}{3}}(-\frac{\pi}{4}) - \sin^{\frac{2}{3}}(-\frac{\pi}{2})\right) - \frac{3}{8}\left(\sin^{\frac{8}{3}}(-\frac{\pi}{4}) - \sin^{\frac{8}{3}}(-\frac{\pi}{2})\right) =$

$\frac{3}{2}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{2}{3}} - 1\right) - \frac{3}{8}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{8}{3}} - 1\right) = -\frac{9}{8} + \frac{21}{16}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{\frac{2}{3}}.$

3. $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\sin^2 x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{2\sin^2 x+\cos^2 x}=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{2tg^2x+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\limits_9^{\frac{\pi}{4}}\frac{d(\sqrt{2}\cdot tgx)}{(\sqrt{2}\cdot tgx)^2+1}=$

$\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}\cdot tgx)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(arctg(\sqrt{2}\cdot tg\frac{\pi}{4}-arctg0\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}arctg\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}arctg\sqrt{2}$.

4. $\int\limits_0^{\sqrt{3}-1}\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}=\int\limits_0^{\sqrt{3}-1}\frac{d(x+1)}{\sqrt{-(x+1)^2+2^2}}=\arcsin\frac{x+1}{2}\Big|_0^{\sqrt{3}-1}=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}-\arcsin\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$.

5. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{cos\,x-cos^3 x}dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{cos\,x\left(1-cos^2 x\right)}dx=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}|sin\,x|(cos\,x)^{1/2}dx=$

Скористаємося парністю підінтегральної функції.

$=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\left(\cos x\right)^{1/2}dx=-2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos x\right)^{1/2}d(\cos x)=-2\cdot\frac{\left(\cos x\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{4}{3}$.

6. Обчислити середнє значення функції

$f(x)=\cos\frac{\pi}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}$ на відрізку $\left[0;\frac{1}{2}\right]$.

Розв'язання. Середнє значення функції за теоремою про середнє дорівнює:

$f(\xi)=\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx,$ ãäå $b-a=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$.

$\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi}{1-x}\cdot\frac{1}{(1-x)^2}dx=\int\limits_0^{\frac{1}{2}}\cos\frac{\pi}{1-x}d\left(\frac{1}{1-x}\right)=\sin\frac{\pi}{1-x}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=\sin 2\pi-\sin\pi=0$.

Отже, середнє значення функції дорівнює

$f(\xi)=\frac{1}{\frac{1}{2}}\cdot 0=0$.

7. Оцінити інтеграл $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2}\frac{\sin x}{x}dx$.

Точне значення інтеграла в цьому випадку знайти не можна, тому що первісна не виражається через елементарні функції.

Для дослідження поведінки підінтегральної функції $f\left(x\right)=\frac{sin\,x}{x}$ на відрізку $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ знаходимо її похідну:

$$f'(x)=\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}=\left\|x<tgx,\ x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{3}\right]\right\|=\frac{(x-tgx)\cos x}{x^2}<0$$

Підінтегральна функція $f(x)=\frac{\sin x}{x}$ спадаає на відрізку $\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$, тому що її похідна $f'(x)<0.$.

Найменше значення функції $m=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}$, а найбільше значення функції $M=f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$. $\forall x\in\left[\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{2}\right]$ має місце нерівність: $\frac{2}{\pi}\le\frac{\sin x}{x}\le\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$.

Скориставшись теоремою про оцінку інтеграла, одержимо: $\frac{1}{2}\le\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{x}dx\le\frac{\sqrt{2}}{2}$.

8. Оцінити абсолютну величину інтеграла $\int_{10}^{19}\frac{\sin x}{1+x^8}dx$.

Оскільки $|\sin x|\le 1$, то при $x>10$ виконується нерівність $\left|\frac{\sin x}{1+x^8}\right|\le 10^{-8}$.

Використовуючи властивість 7, одержимо :

$$\left|\int_{10}^{19}\frac{\sin x}{1+x^8}dx\right|<\int_{10}^{19}\left|\frac{\sin x}{1+x^8}\right|dx<(19-10)10^{-8}<10^{-7}.$$

Заміна змінної в визначеному інтегралі

Нехай функція $f(x)$ неперервна на $[a,b]$, а функція $x=\varphi(t)$ – монотонна й має неперервну похідну на відрізку $[\alpha,\beta]$, де $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, тоді має місце формула заміни змінної в визначеному інтегралі $\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Зауваження. Заміну змінної інтегрування звичайно роблять за допомогою монотонних неперервних функцій, тому що монотонність гарантує однозначність як прямої, так і оберненої функції. При цьому, якщо змінна *t* змінюється в проміжку *[α;β],* значення функції $\varphi(t)$ не повинні виходити за межі проміжку *[a, b]*.

Відзначимо, що до інтегралів виду $\int\frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}}$ застосовна підстановка *x-α=1/t* (підстановка приводить до менш громіздких викладень, ніж тригонометричні підстановки).

Приклад 1. Обчислити інтеграл. $\int_1^2\frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}$.

1-й спосіб: застосуємо підстановку *x=1/t.* Знайдемо межі: інтегрування для змінної *t* . Маємо *t=1/x,* тоді при *x=1* змінна t приймає значення, рівне 1 (нижня межа інтегрування). При *x=2* змінна *t* дорівнює *1/2* (верхня межа інтегрування). Таким чином, при зміні змінної *x* від *1* до *2* змінна *t,* монотонно спадаючи, змінюється від *1* до *½.* Функція *x=1/ t* – монотонна й неперервно диференцційовна функція на відрізку *[1/2;1]*. Отже,

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \left\| \begin{array}{l} x=\frac{1}{t},\ dx=-\frac{dt}{t^2}, \\ x=1 \Rightarrow t=1, \\ x=2 \Rightarrow t=\frac{1}{2}. \end{array} \right\| = -\int_1^{\frac{1}{2}} \frac{tdt}{t^2\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}} = \int_{\frac{1}{2}}^{t} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_{\frac{1}{2}}^{1} =$$

$$= \arcsin 1 - \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}\ .$$

2-й спосіб:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \int_1^2 \frac{dx}{x^2\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}} = -\int_1^2 \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{x}\right)^2}} = -\arcsin\frac{1}{x}\Big|_1^2 = -\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin 1 = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{3}.$$

3-й спосіб:

$$\int_1^2 \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \left\| \begin{array}{l} x=\frac{1}{\sin t},\ dx=-\frac{\cos t dt}{\sin^2 t}; \\ \sqrt{x^2-1}=\frac{\cos t}{\sin t};\ x=1 \Rightarrow \\ \sin t = 1 \Rightarrow t=\frac{\pi}{2};\ x=2 \Rightarrow \\ \sin t=\frac{1}{2} \Rightarrow t=\frac{\pi}{6}. \end{array} \right\| = -\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{6}} \sin t \cdot \frac{\sin t \cdot \cos t dt}{\sin^2 t \cdot \cos t} = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} dt = t \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}.$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\,dx$.

Заміна: $x = a\sin t$. Визначимо межі інтегрування для змінної t. Нехай $x = 0$, тобто беремо *x* рівним нижній межі інтегрування у вихідному інтегралі. Тоді в якості *t* можна взяти будь-який розв’язок рівняння $a\sin t = 0$, наприклад $t = 0$. При знаходженні верхньої межі для змінної *t* замість *x* підставляємо верхню межу інтегрування, рівну *a,* і розв’зуємо рівняння $a = a\sin t$, звідки $\sin t = 1,\ t = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in z$, тобто рівняння має нескінченну множину розв’язків. При цьому, взявши розв’язок $t = \frac{\pi}{2}$, (при $n = 0$), ми одержимо, що при зміні *t* від 0 до $\frac{\pi}{2}$ змінна *x* буде монотонно змінюватися від 0 до *a*. Таким чином,

$$I=\left|\begin{array}{l} x=a\sin t,\\ dx=a\cos t dt\\ x=0,\ t=0\\ x=a,\ t=\pi/2\end{array}\right|=\int_0^{\pi/2}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\,a\cos t dt=a^2\int_0^{\pi/2}\cos^2 t dt=$$

$$=a^2\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{\pi/2}=\frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\sin\pi}{2}\right)=\frac{\pi a^2}{4}.$$

Приклад 3. Обчислити інтеграл $I=\int_0^{-ln 2}\sqrt{1-e^{2x}}dx$.

Функція $\sqrt{1-e^{2x}}$ — неперервна й монотонна на проміжку *[-ln2;0]*. Вважаючи $t=\sqrt{1-e^{2x}}$, знаходимо межі інтегрування для змінної *t*. При *x=0* одержимо: *t=0*; при *x=-ln2* знаходимо: $t=\sqrt{1-e^{-2\ln 2}}=\sqrt{1-e^{-\ln 4}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Очевидно, обернена функція, рівна $x=\frac{ln\left(1-t^2\right)}{2}$ – неперервно диференційовна на проміжку $0<t<\frac{\sqrt{3}}{2}$, тоді

$$I=\int_0^{-ln 2}\sqrt{1-e^{2x}}dx=\left\|\begin{array}{l}1-e^{2x}=t^2, -2e^{2x}dx=2tdt,\\ dx=\frac{-tdt}{e^{2x}}=\frac{tdt}{t^2-1}\end{array}\right\|=$$

$$I=\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{t^2dt}{t^2-1}=\int_0^{\sqrt{3}/2}\frac{\left(t^2-1\right)+1}{t^2-1}dt=\left(t+\frac{1}{2}ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3}/2}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}ln\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-1}{\frac{\sqrt{3}}{2}+1}\right|=$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}ln\left(2-\sqrt{3}\right)^2=\frac{\sqrt{3}}{2}+ln\left(2-\sqrt{3}\right).$$

3. При обчисленні інтеграла $I=\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}$, застосовуючи підстановку $t=tg\frac{x}{2}$, знаходимо нижню межу інтегрування $t=tg0=0$, верхня межа $t=tg\pi=0$. Тоді

$$I=2\int_0^0\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(2+\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int_0^0\frac{dt}{t^2+3}=0,$$

що неможливо, тому що підінтегральна функція $\frac{1}{2+\cos x}>0$. Пояснюється це тим, що функція $tg\frac{x}{2}$ в точці $x=\pi\in[0,2\pi]$ терпить розрив й, отже, не має неперервної похідної. Підстановка $t = tg\frac{x}{2}$ незастосовна на проміжку $[0, 2\pi]$. Наведений інтеграл може бути обчислений у такий спосіб.

$$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x} = \left\|\begin{matrix} x-\pi=t \\ 0\to -\pi \\ 2\pi \to \pi\end{matrix}\right\| = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{dt}{2-\cos t} = 2\int_0^{\pi}\frac{dt}{1+2\sin^2\frac{t}{2}} = \int_0^{\pi}\frac{dt}{\sin^2\frac{t}{2}\left(\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}+1\right)} =$$

$$= -2\int_0^{\pi}\frac{dctg\frac{t}{2}}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}ctg^2\frac{t}{2}} = -\frac{4}{\sqrt{3}}arctg\frac{ctg\frac{t}{2}}{\sqrt{3}}\Bigg|_0^{\pi} = \frac{4}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{2} = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

Відзначимо, *що на відміну від заміни змінної в невизначеному інтегралі, у визначеному інтегралі не потрібно виконувати обернену підстановку, тобто переходити у відповіді до старої змінної.*

При використанні формули заміни змінної в визначеному інтегралі необхідно перевіряти виконання умов:

1) Функція $x = \varphi(t)$ – неперервно диференційовна на відрізку $[\alpha,\beta]$ або $[\beta,\alpha]$ ($\alpha \ge \beta$ або $\alpha \le \beta$) осі ot.
2) При зміні t від α до β значення функції $x = \varphi(t)$ не виходять за межі відрізка $[a,b]$.
3) $\varphi(\alpha) = a,\ \varphi(\beta) = b$.

Приклад 4. При обчисленні інтеграла $\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sin^2 x+\cos^2 x}$ формальне застосування формули заміни змінної інтегрування приводить до наступного результату:

$$\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sin^2 x+\cos^2 x} = \int_0^{\pi}\frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{1+tg^2 x}\left\|\begin{matrix} t = tgx \\ x=0 \Rightarrow t=0 \\ x=\pi \Rightarrow t=0 \\ dt = \frac{dx}{\cos^2 x}\end{matrix}\right\| = \int_0^{0}\frac{dt}{1+t^2} = 0.$$

З іншого боку, $\int_0^{\pi}\frac{dx}{\sin^2 x+\cos^2 x} = \int_0^{\pi}dx = x\Big|_0^{\pi} = \pi$

У цьому випадку перераховані умови застосовності формули заміни змінної порушуються, тому що функція $t = tgx$ в точці $x = \frac{\pi}{2} \in [0;\pi]$ терпить розрив й, отже, не має неперервної похідної. Підстановка $t = tgx$ незастосовна на проміжку $[0;\pi]$.

Приклад 5. Обчислити інтеграл $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^9-3x^7+4x^5-2x^3+x+2}{\cos^2 x}dx$

Розв'язання. Представимо інтеграл у вигляді суми двох інтегралів, тоді

$$I=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{x^9-3x^7+4x^5-2x^3+x}{\cos^2 x}dx+2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}.$$

Скористаємося властивістю (11) визначених інтегралів, тоді, оскільки функція $\frac{x^9-3x^7+4x^5-2x^3+x}{\cos^2 x}$ непарна, як частка непарної й парної функції, а проміжок інтегрування симетричний відносно початку координат, перший інтеграл дорівнює нулю. Тоді, в силу парності функції $\frac{1}{\cos^2 x}$,

$$I=2\cdot 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2 x}=4tgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=4\left(tg\frac{\pi}{4}-tg0\right)=4.$$

Приклад 6. $I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x\cos^5 x}}$

Застосуємо підстановку $t=tgx$, тоді $x=arctgt$ – монотонна, неперервно диференційовна функція.

При $x=\frac{\pi}{4}$ одержимо $t=1$, при $x=\frac{\pi}{3}$ $\Rightarrow$ $t=\sqrt{3}$, тобто $1\le t\le\sqrt{3}$; $dx=\frac{dt}{1+t^2}$.

$$I=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{(1+t^2)\sqrt[4]{\frac{t^3}{(1+t^2)^4}}}=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{dt}{t^{3/4}}=\int_1^{\sqrt{3}}t^{-\frac{3}{4}}dt==4t^{\frac{1}{4}}\Big|_1^{\sqrt{3}}=4\left(\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{4}}-1\right)=4\left(\sqrt[8]{3}-1\right)$$

Приклад 7. $I=\int_1^{4,5}\frac{dx}{1+\sqrt[3]{2x-1}}$.

Скористаємося заміною: $\sqrt[3]{2x-1}=t$. Визначимо новий проміжок інтегрування. Якщо $x=1$, то $t=1$; якщо $x=4,5$, те $t=\sqrt[3]{8}=2$. Отже, $2x\text{-}1=t^3$, $2dx=3t^2dt$, $dx=3/2t^2dt$.

$$I=\frac{3}{2}\int_1^2\frac{t^2dt}{1+t}=\frac{3}{2}\int_1^2\frac{(t^2-1)}{1+t}dt=\frac{3}{2}\left(\int_1^2(t-1)dt+\int_1^2\frac{dt}{1+t}\right)=$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{(t-1)^2}{2}+\ln(1+t)\right)\Bigg|_1^2=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\ln 3-\ln 2\right)=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}+\ln\frac{3}{2}\right).$$

Формула інтегрування частинами: $\int_a^b u\cdot dv=u\cdot v\Big|_a^b-\int_a^b v\cdot du$.

Приклади.

1. $I=\int_1^2 x\log_2 xdx$.

Покладаємо $u=\log_2 x$, тоді $du=\dfrac{dx}{x\ln 2}$, $dv=xdx$, $v=\dfrac{x^2}{2}$.

Отже,

$$I=\log_2 x\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2-\frac{1}{2}\int_1^2 x^2\cdot\frac{dx}{x\ln 2}=\log_2 2\cdot 2-\log_2 1\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2\ln 2}\int_1^2 xdx=2-\frac{1}{2\ln 2}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_1^2=$$

$$2-\frac{1}{2\ln 2}\cdot 2+\frac{1}{4\ln 2}=2-\frac{3}{4\ln 2}.$$

2. $I=\int_0^3 x\cdot arctgxdx$.

Покладаємо $u=arctgx$, тоді $du=\dfrac{dx}{1+x^2}$, $dv=xdx$, $v=\dfrac{x^2}{2}$, тоді:

$$I=arctgx\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_0^3-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{x^2dx}{1+x^2}=\frac{9}{2}arctg3-\frac{1}{2}\int_0^3\frac{(x^2+1)-1}{1+x^2}dx=\frac{9}{2arctg3}-\frac{1}{2}(x-arctgx)\Big|_0^3$$

$$=\frac{9}{2}arctg3-\frac{1}{2}(3-arctg3)=5arctg3-\frac{3}{2}.$$

3. Обчислити інтеграл: $I_n=\int_0^{\pi/2}sin^n xdx$.

Нехай $u=sin^{n-1}x$, тоді $du=(n-1)sin^{n-2}x\cos xdx$, $dv=sinx\,dx$, $v=-cosx$.

$$I_n=-cos\,x\,sin^n x\Big|_0^{\pi/2}+(n-1)\int_0^{\pi/2}sin^{n-2}x\left(1-sin^2 x\right)dx=(n-1)\int_0^{\pi/2}sin^{n-2}xdx-$$

$$-(n-1)I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n.$$

Отже, $I_n=\dfrac{n-1}{n}I_{n-2}$. Отримане рекурентне співвідношення дозволяє для будь-якого натурального n одержати значення інтеграла

$$I_{2k}=\frac{(2k-1)(2k-3)...3\cdot 1}{2k(2k-2)...2}I_0=\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\frac{\pi}{2},\ \text{де}\ I_0=\int_0^{\pi/2}dx=\frac{\pi}{2}.$$

При $n=2k+1$ знаходимо

$$I_{2k+1}=\frac{2k(2k-2)...2}{(2k-1)(2k-3)...3\cdot 1}I_1=\frac{(2k)!!}{(2k+1)!!},\ \text{де}\ I_1=\int_0^{\pi/2}\sin xdx=1.$$

Крім того, $\int_0^{\pi/2}cos^n xdx=\int_0^{\pi/2}sin^n xdx$ (що очевидно з геометричних міркувань і можна перевірити заміною $t=\dfrac{\pi}{2}-x$).

Таким чином,

$$\int_0^{\pi/2}cos^n xdx=\int_0^{\pi/2}sin^n xdx=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\dfrac{\pi}{2}, & \text{якщо } n-\text{парне}\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & \text{якщо } n-\text{непарне}\end{cases}.$$

Наприклад,

$$I_6 = \int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx = \frac{5!!}{6!!}\frac{\pi}{2} = \frac{5\cdot 3\cdot 1}{6\cdot 4\cdot 2}\frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}.$$

7.3. Геометричні застосування визначених інтегралів

Обчислення площ, об'ємів, довжин дуг

Якщо криволінійна трапеція обмежена кривою $y = f(x)$, прямими: $x = a$, $x = b$, $(a<b)$ $y = 0$ і $f(x) \ge 0$, то її площа

$$S = \int_a^b f(x)dx \qquad (7.3.1).$$

Якщо $f_1(x) \le f_2(x)$, то площа, обмежена цими кривими й прямими $x = a$ й $x = b$ дорівнює $S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x) \right) dx$.

Об'єм тіла обертання, отриманого при обертанні криволінійної трапеції, обмеженою зверху кривою $y = f(x)$ і прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$ навколо осі *OX*, знаходиться за формулою.

$V_{ox} = \pi \int_a^b y^2 dx$, при обертанні навколо осі *OY*: $V_{oy} = 2\pi \int_a^b xydx$.

Об'єм тіла, отриманого при обертанні фігури, обмеженої лініями $y = y_2(x)$ й $y = y_1(x)$ $(y_1 \le y_2)$, дорівнює

$$V_{ox} = \pi \int_a^b \left(y_2^2 - y_1^2 \right) dx, \quad V_{oy} = 2\pi \int_a^b x(y_2 - y_1)dx.$$

Довжина дуги кривої у декартових координатах*:*

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx \quad (a<b).$$

Випадок параметричного задання кривої.

Якщо крива задана параметричними рівняннями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad (\alpha \le t \le \beta),$$

причому точці *A* відповідає значення параметра *t=α,* точці *B* – значення *t=β.*

Коли *t* змінюється від *α* до *β,* то точка описує криву *AB* (рис. 7.3).

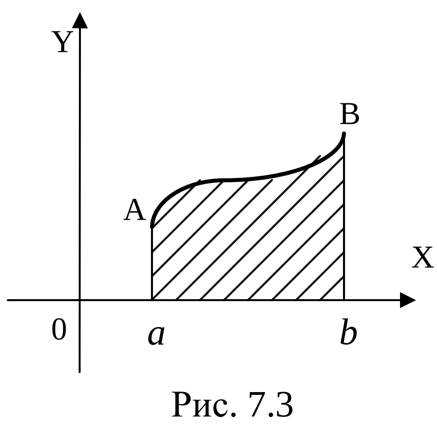

Рис. 7.3

При цьому $a = x(\alpha)$, $b = x(\beta)$, де a й b – абсциси точок *A* и *B*. Виконуючи заміну змінної в інтегралі (7.2.1), одержимо $S=\int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$ – площа у випадку параметричного задання кривої.

Довжина дуги АВ, заданої параметричними рівняннями:

$L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt \quad (\alpha<\beta)$.

Площа в полярних координатах.

Якщо крива задана рівнянням у полярних координатах $\rho=\rho(\varphi)$,
то площа криволінійного сектора *AOB* (рис. 7.4), обмеженого
дугою кривої і двома полярними радіусами *OA* й *OB*, відповідним значенням кута α і β $(\alpha<\beta)$, виразиться інтегралом $S=\frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\rho^2(\varphi)d\varphi$.

Довжина дуги *AB* у полярних координатах:

$L=\int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{\rho^2(\varphi)+\rho'^2(\varphi)}d\varphi$

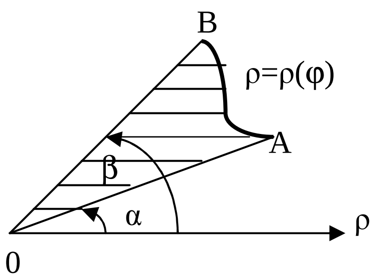

рис.7.4

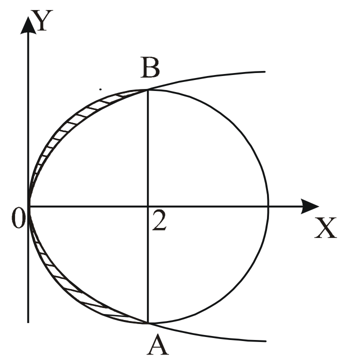

Рис.7.5

Приклад 1. Знайти площі двох фігур, обмежених параболою $y^2=2x$ й колом $y^2=4x-x^2$ (Рис.7.5).

Розв'язання. Знайдемо центр і радіус кола, виділивши повний квадрат: $x^2-4x+y^2=0$, $(x-2)^2+y^2=2^2$.

Отже, центр кола має координати *(2;0)*, $R=2$.

Знайдемо точки перетину кривих розв'зуючи систему рівнянь $\begin{cases} y^2=4x-x^2, \\ y^2=2x. \end{cases}$

Тоді 0*(0;0)*, *A(2;-2)*, *B(2;2)* – точки перетину.
Площа заштрихованої частини дорівнює

$$S=2\int\limits_0^2\left(\sqrt{4x-x^2}-\sqrt{2x}\right)=2\left(\int\limits_0^2\sqrt{4x-x^2}dx-\sqrt{2}\int\limits_0^2\sqrt{x}dx\right)$$

Перший інтеграл у правій частині рівності дорівнює $\frac{1}{4}$ площі круга, тобто π,

виходить, $S=2\left(\pi-\frac{2\sqrt{2}}{3}x^{3/2}\Big|_0^2\right)=2\left(\pi-\frac{8}{3}\right)$.

Площа незаштрихованої частини дорівнює $S_1=\pi R^2-S=4\pi-2\left(\pi-\frac{8}{3}\right)=2\left(\pi+\frac{8}{3}\right)$.

Приклад2. Обчислити площу кардіоїди $\rho = a(1+\cos\varphi)$.
Тому що крива симетрична щодо полярної осі, обчислимо площу верхньої половини, при цьому кут φ змінюється від 0 до π (Рис.7.6).

Застосуємо формулу: $S = \frac{1}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta} \rho^2(\varphi)d\varphi$.

Площа дорівнює $S = 2\cdot\frac{1}{2}\int\limits_{0}^{\pi} a^2(1+\cos\varphi)^2 d\varphi =$

$$= a^2\int\limits_0^{\pi}(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi)d\varphi = a^2\left(\frac{3}{2}\varphi+2\sin\varphi+\frac{\sin 2\varphi}{4}\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{3}{2}\pi a^2.$$

Приклад 3. Знайти довжину астроїди: $x^{2/3}+y^{2/3}=a^{2/3}$.

І спосіб $l = \int\limits_a^b \sqrt{1+(y'_x)^2}\,dx$.

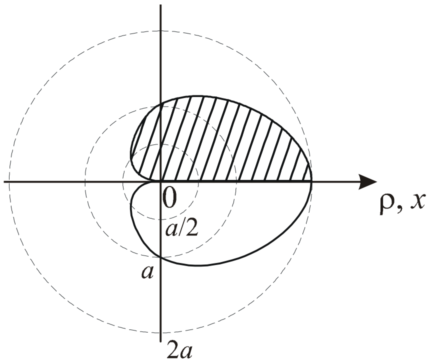

Рис.7.6

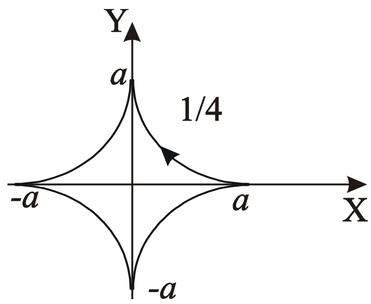

Рис.7.7

Диференціюючи рівняння астроїди, одержимо $\frac{2}{3}x^{-1/3}+\frac{2}{3}y^{-1/3}y'_x = 0 \Rightarrow y'_x = \frac{-y^{1/3}}{x^{1/3}}$

Крива симетрична щодо обох координатних осей, тому обчислюємо довжину дуги однієї чверті астроїди (Рис.7.7):

$$\frac{1}{4}l = \int\limits_0^a\sqrt{1+\frac{y^{2/3}}{x^{2/3}}}dx = \int\limits_0^a\frac{a^{1/3}}{x^{1/3}}dx = \frac{3a^{1/3}x^{2/3}}{2}\Big|_0^a = \frac{3a}{2} \Rightarrow l = 6a.$$

ІІ спосіб. Використаємо параметричні рівняння астроїди

$$\begin{cases} x = a\cos^3 t, \\ y = a\sin^3 t. \end{cases} \quad (0 \le y \le 2\pi)$$

Для чверті довжини астроїди, параметр *t* змінюється від *t=0* до $t = \frac{\pi}{2}$.

Використаємо формулу

$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta}\sqrt{x_t'^2+y_t'^2}\,dt$. Знаходимо $x_t'^2+y_t'^2 = \left(3a\cos^2 t\left(-\sin t\right)\right)^2+(3a\sin^2 t\cos t)^2 =$

$$= 9a^2(\cos^4 t\sin^2 t+\sin^4 t\cos^2 t) = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t+\sin^2 t) = 9a^2\cos^2 t\sin^2 t$$

$$\frac{1}{4}l = 3a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t}\,dt = 3a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\,dt = 3a\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\,d(\sin t) = 3a\frac{\sin^2 t}{2}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3a}{2}\left(\sin^2\frac{\pi}{2}-\sin^2 0\right) =$$

$$= \frac{3a}{2} \Rightarrow l = 6a.$$

Приклад4. Обчислити площу, обмежену віссю абсцис й однією аркою циклоїди

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

Використаємо формулу: $S = \int\limits_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt$.

Знаходимо $x'(t) = a(1 - \cos t)$, тоді $S = \int\limits_{0}^{2\pi} a^2(1 - \cos t)^2 dt = a^2 \int\limits_{0}^{2\pi} (1 - 2\cos t + \cos^2 t)dt =$

$$a^2 \int\limits_{0}^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2}\right) dt = a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{\sin 2t}{2}\right)\Bigg|_0^{2\pi} =$$

$$a^2 \left(\frac{3}{2} \cdot 2\pi - 2\sin 2\pi + \frac{\sin 4\pi}{2}\right) = 3\pi a^2.$$

Приклад5. Обчислити об'єм кулі радіуса R з центром на початку координат.

Кулю одержимо обертанням навколо осі OX півкола $y = \sqrt{R^2 - x^2}$.

$$V_{ox} = \pi \int\limits_{-R}^{R} \left(R^2 - x^2\right) dx = 2\pi \int\limits_{0}^{R} (R^2 - x^2) dx = 2\pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^R = 2\pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4}{3}\pi R^3 (од^3).$$

Розділ 8

НЕВЛАСНІ ІНТЕГРАЛИ

8.1. Невласні інтеграли з нескінченними межами інтегрування (I роду) і їх обчислення

8.1.1. Основні поняття

Нехай функція f(x) визначена на нескінченному проміжку $\left[a,+\infty\right)$ й інтегровна в будь-якій скінченній його частині $[a, A]$ $(A \geq a)$, тоді, якщо існує $\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$, то цю межу називають *невласним інтегралом I роду* або інтегралом по нескінченному проміжку $\left[a,+\infty\right)$ від функції $f(x)$ й позначають $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$. Таким чином, $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx = \lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_a^A f(x)dx$.

У тому випадку, якщо межа існує й скінченна, невласний інтеграл *збігається*. Якщо ж межа нескінченна або взагалі не існує, то невласний інтеграл не існує або *розбігається*.

Аналогічно вводиться поняття інтеграла по нескінченному проміжку $\left(-\infty,a\right]$, тобто $\int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx = \lim\limits_{B\to-\infty}\int\limits_B^a f(x)dx$.

Невласний інтеграл з обома нескінченними межами визначається рівністю $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$, де a – будь-яке число. При цьому передбачається існування обоих інтегралів, що стоять праворуч.

8.1.2. Геометричний зміст невласного інтеграла

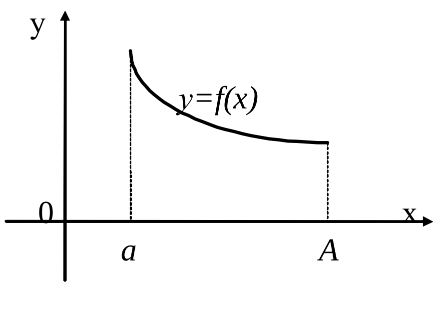

Рис. 8.1

Якщо $f(x) \geq 0$ й неперервна $\forall x \in [a, A]$, то визначений інтеграл $\int\limits_a^A f(x)dx$ геометрично є площа криволінійної трапеції, обмеженої віссю *OX*, кривою $y = f(x)$ і прямими $x=a$, $x=A$.

При зростанні $A(A \to +\infty)$ пряма $x=A$ переміщається вправо. Якщо невласний інтеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx$ збігається, то його величину приймають за площу нескінченної криволінійної трапеції (Рис. 8.1).

Приклад 1.

$\int_0^{+\infty} \cos x dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A \cos x dx = \lim_{A\to+\infty} \sin x \Big|_0^A = \lim_{A\to+\infty} (\sin A - \sin 0) = \lim_{A\to+\infty} \sin A.$ Інтеграл розбігається, тому що $\lim_{A\to+\infty} \sin A$ не існує.

Приклад 2.

Розглянемо $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ $(a>0)$. Дослідимо, при яких значеннях інтеграл збігається.

а) *p=1*. За означенням знаходимо

$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A \frac{dx}{x} = \lim_{A\to+\infty} \ln x \Big|_a^A = \lim_{A\to+\infty} (\ln A - \ln a) = +\infty$, інтеграл розбігається.

б) *p<1*

$$\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A x^{-p} dx = \lim_{A\to+\infty} \left(\frac{1}{1-p} x^{1-p} \Big|_a^A \right) = \frac{1}{1-p} \lim_{A\to+\infty} \left(A^{1-p} - a^{1-p} \right) = +\infty,$$

інтеграл розбігається.

в) *p>1*

При *p>1* $\lim_{A\to+\infty} A^{1-p} = 0$ і тоді $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{p-1}$, тобто збігається.

Отже, невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \begin{cases} \frac{a^{1-p}}{p-1}, p>1, & \text{збігається,} \\ +\infty, p \le 1, & \text{розбігається.} \end{cases}$

Геометрично це означає, що при *p>1* функція $\frac{1}{x^p}$ наближається до нуля при $x \to \infty$ настільки швидко, що площа нескінченної криволінійної трапеції виявляється скінченною.

Приклад 3.

$\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{A\to+\infty} \int_0^A e^{-x} dx = -\lim_{A\to+\infty} e^{-x} \Big|_0^A = -\lim_{A\to+\infty} \left(e^{-A} - e^0 \right) = 1$, збігається.

8.1.3. Узагальнення формули Ньютона-Лейбниця

Нехай $f(x)$ неперервна на $[a,\infty)$ функція, а $F(x)$ – первісна для $f(x)$, тоді

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A\to+\infty} \int_a^A f(x) dx = \lim_{A\to+\infty} F(x)\Big|_a^A = \lim_{A\to+\infty} \big(F(A) - F(a)\big) = F(\infty) - F(a) = F(x)\Big|_a^\infty,$$

тут $F(\infty) = \lim_{A\to\infty} F(A)$; користуємося для стислості умовним записом, опускаючи межу, тоді $\int_a^\infty f(x) dx = F(x)\Big|_a^\infty = F(\infty) - F(a)$.

Приклад 4. $\int_1^\infty \frac{dx}{1+x^2} = arctgx\Big|_1^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$.

Для невласних інтегралів справедлива формула *заміни змінної*. Часто в результаті заміни змінної невласний інтеграл зводиться до визначеного.

Приклад 5.

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}\left\|\begin{matrix}x=tgz\\ dx=\dfrac{dz}{\cos^2 z}\end{matrix}\right\|=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^4 z}{\cos^2 z}dz=\int_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2z}{2}dz=\left(\frac{1}{2}z+\frac{\sin 2z}{4}\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}.$$

Приклад 6. $I=\int_0^{\infty}\frac{arctgxdx}{\left(1+x^2\right)^{3/2}}$.

Покладаючи $t=arctgx$, знаходимо $\frac{dx}{1+x^2}=dt$, $x=tgt$, $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\cos t$. Межі інтегрування для змінної t: при $x=0$ маємо $t=0$; при $x\to\infty, t\to\frac{\pi}{2}$. Одержимо

$$I=\int_0^{\pi/2}t\cos tdt=\left\|\begin{matrix}u=t & dv=\cos tdt\\ du=dt & v=\sin t\end{matrix}\right\|=\left(t\sin t+\cos t\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{2}-1.$$

Збіжні невласні інтеграли мають всі основні властивості визначених інтегралів.

При розгляді невласного інтеграла, насамперед, необхідно встановити, чи буде він збіжним. Питання про збіжність може бути вирішено або безпосереднім обчисленням невласного інтеграла, або за допомогою спеціальних ознак збіжності.

Приклад 7. Дослідити збіжність інтеграла

$$\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\left(\ln x\right)^{3/2}}=\lim_{A\to\infty}\int_e^{A}\frac{d\ln x}{\left(\ln x\right)^{3/2}}=\lim_{A\to\infty}\frac{\left(\ln x\right)^{-1/2}}{-\frac{1}{2}}\Bigg|_e^A=-2\lim_{A\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{\ln A}}-\frac{1}{\sqrt{\ln e}}\right)=2.$$

Виходить, інтеграл збігається.

У багатьох задачах, пов'язаних з невласними інтегралами, досить тільки з'ясувати питання про збіжність інтегралів і не потрібно знаходити його значення. У цьому випадку, як правило, використовуються наступні ознаки збіжності.

8.1.4. Ознаки збіжності невласних інтегралів першого роду для невід'ємних функцій

Зауваження. Збіжність невласного інтеграла першого роду залежить від поведінки функції на нескінченності, тобто. якщо , те невласні інтеграли й збігаються або розбігаються одночасно.

Теорема 1. *(ознака порівняння). Нехай при досить великих виконується нерівність* $0\le f\left(x\right)\le g\left(x\right)$. *Тоді зі збіжності інтеграла випливає збіжність інтеграла* $\int_a^{+\infty}f\left(x\right)dx$, *а з розбіжності інтеграла* $\int_a^{+\infty}f\left(x\right)dx$ *випливає розбіжність інтеграла* $\int_a^{+\infty}g\left(x\right)dx$.

Приклад 8. У теорії імовірностей важливу роль грає інтеграл Пуассона $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$.

Невизначений інтеграл не береться в елементарних функціях. Порівняємо цей інтеграл зі збіжним інтегралом $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ (приклад 3). При $x \geq 1$ маємо $x^2 \geq x$, тоді $e^{-x^2} \leq e^{-x}$. Виходить, $\int_1^{+\infty} e^{-x^2}dx \leq \int_1^{+\infty} e^{-x}dx$. Зі збіжності інтеграла $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$ випливає збіжність інтеграла $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx$.

Теорема 2. (*гранична форма ознаки порівняння). Якщо існує* $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lambda \ (0 < \lambda < +\infty)$, *то інтеграли* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *й* $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ *збігаються або розбігаються одночасно.*

Приклад 9. Дослідити на збіжність $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$. Підінтегральна функція $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}$ при $x \to \infty$ є нескінченно малою величиною порядку $\frac{1}{x^2}$. Виберемо $g(x) = \frac{1}{x^2}$. Оскільки інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ $(p = 2 > 1)$ збігається, то за ознакою порівняння в граничній формі маємо $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x\sqrt{1+x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = 1$.

Виходить, інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$ збігається.

8.1.5. Невласні інтеграли від знакозмінних функцій

Теорема *(достатня ознака збіжності). Нехай функція* $f(x)$ *визначена* $\forall x \geq a$. *Тоді, якщо* $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ *збігається, то збігається й інтеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

Невласний інтеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *називається абсолютно збіжним, якщо збігається* $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$. *Невласний інтеграл* $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ *називається умовно збіжним, якщо він збігається, а інтеграл* $\int_a^{+\infty} |f(x)|dx$ розбігається.

Приклад 10. Покажемо, що інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}dx$ збігається абсолютно. Дійсно, оскільки $\left|\frac{\sin x}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$, а інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ $(p = 2 > 1)$ збігається, то в силу ознаки порівняння вихідний інтеграл абсолютно збігається.

Приклад 11. Дослідити збіжність інтеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. Ознаку порівняння застосувати безпосередньо не можна. Для доказу збіжності інтеграла застосуємо метод інтегрування частинами.

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \left| \begin{matrix} u = \frac{1}{x}; du = -\frac{dx}{x^2} \\ dv = \sin x dx; v = -\cos x \end{matrix} \right| = -\frac{1}{x} \cos x \Big|_1^{+\infty} - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx = \cos 1 - \int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Застосовуючи тепер ознаку порівняння, одержимо $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\cos x}{x^2} \right| dx \le \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$ $(p = 2)$. Інтеграл збігається.

Отже, збігається. Покажемо тепер, що інтеграл $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ розбігається, тобто вихідний інтеграл збігається умовно. Дійсно, число $|\alpha| < 1$ більше свого квадрата, тобто $|\alpha| > \alpha^2$, тоді $\left| \frac{\sin x}{x} \right| \ge \frac{\sin^2 x}{x}$.

За ознакою порівняння досить довести розбіжність інтеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x} dx$; $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, а $\int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos 2x}{2x} dx = \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x} - \frac{1}{2} \int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$. Збіжність інтеграла $\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x} dx$ доводиться інтегруванням частинами, а інтеграл $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$ $(p = 1)$ розбігається. Тому інтеграл $\int_1^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx$ також розбігається.

Приклад 12. Дослідити збіжність інтеграла $I = \int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln \ln x}$.

Невласний інтеграл I роду

$$\int_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x \ln \ln x} = \int_{e^2}^{\infty} \frac{d \ln x}{\ln \ln x} = \left| \begin{matrix} \ln x = t \\ x = e^2,\ t = \ln e^2 = 2 \\ x \to \infty,\ t \to \infty \end{matrix} \right| = \int_2^{\infty} \frac{dt}{\ln t}$$

Оскільки $\ln t < t$ при $t \ge 2$, звідси слідує нерівність $\frac{1}{\ln t} > \frac{1}{t}$. Досліджуваний інтеграл розбігається за ознакою порівняння, тому що $\int_2^{\infty} \frac{dt}{t}$ розбігається.

Приклад 13. Дослідити збіжність інтеграла

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{arctg\ x}{\left(1 + x^2\right)^{3/2}} dx.$$

Підінтегральна функція є нескінченно малою величиною порядку $p=3$ відносно $\frac{1}{x}$: $\frac{arctg\ x}{\left(1+x^2\right)^{3/2}} \underset{x\to\infty}{=} 0^*\left(\frac{1}{x^3}\right)$. Інтеграл $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3}$ $(p=3>1)$ збігається, звідси випливає збіжність досліджуваного інтеграла.

8.2. Невласні інтеграли другого роду - інтеграли від необмежених функцій

8.2.1. Основні поняття

Нехай функція $f(x)$ визначена на півінтервалі $[a,b)$, інтегровна на відрізку $[a,b-\varepsilon]$, де $0<\varepsilon<b-a$ й $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=\infty$. Точка b називається при цьому особливою точкою функції $f(x)$. Тоді, якщо існує $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то його називають *невласним інтегралом другого роду*, позначають $\int_a^b f(x)dx$ і говорять, що інтеграл *збігається* $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$.

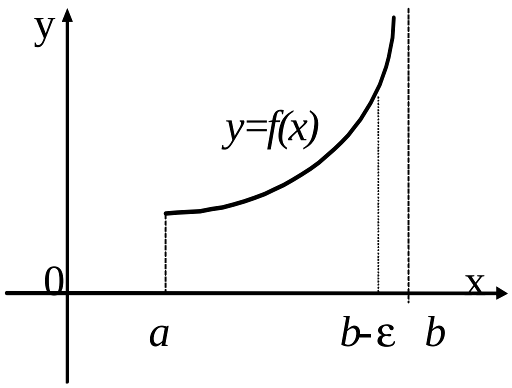

Рис.8.2

Якщо ж границя дорівнює нескінченності або взагалі не існує, то інтеграл розбігається.

Якщо особливою точкою функції $f(x)$ є точка $x=a$, то $\int_a^b f(x)dx=\lim\limits_{\varepsilon_1\to 0}\int_{a+\varepsilon_1}^{b} f(x)dx$.

Якщо $C\in(a,b)$ є особливою точкою функції $f(x)$, то за властивістю адитивності $\int_a^b f(x)dx=\int_a^C f(x)dx+\int_C^b f(x)dx$ й

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx.$$

Якщо хоча б один з інтегралів $\int_a^C f(x)dx$ або $\int_C^b f(x)dx$ розбігається, то невласний інтеграл $\int_a^b f(x)dx$ також розбігається.

Приклад 1.

Дослідити збіжність невласного інтеграла $\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha}$.

Підінтегральна функція в точці $x=a$ має нескінченний розрив.

а) $\alpha \neq 1$. За означенням невласного інтеграла маємо:

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{1-\alpha}(x-a)^{1-\alpha}\Big|_{a+\varepsilon}^b = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{\varepsilon \to 0}\left[(b-a)^{1-\alpha} - \varepsilon^{1-\alpha}\right] = $$

$$= \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}(b-a)^{1-\alpha}, & \alpha<1 \ \to \text{ збігається} \\ +\infty, & \alpha>1 \ \to \text{розбігається} \end{cases}$$

б) $\alpha = 1$. $\int\limits_a^b \frac{dx}{x-a} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{a+\varepsilon}^b \frac{dx}{x-a} = \lim\limits_{\varepsilon \to 0}\left[\ln(b-a) - \ln\varepsilon\right] = +\infty$, тобто інтеграл розбігається.

$$\int\limits_a^b \frac{dx}{(x-a)^\alpha} - \begin{cases} \textit{збігається, при } \alpha<1 \\ \textit{розбігається, при } \alpha \geq 1 \end{cases}.$$

Зокрема, $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^\alpha}$ при $\alpha<1$ збігається; при $\alpha \geq 1$ розбігається.

Приклад 2. Обчислити невласний інтеграл другого роду

$$\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \arcsin x\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0\right) = \frac{\pi}{2}$$

(інтеграл збігається).

8.2.2. Ознаки збіжності невласних інтегралів другого роду для невід'ємних функцій

Теорема 1. (ознака порівняння). *Якщо функції* $f(x)$ *й* $g(x)$ *неперервні* $\forall x \in [a,b]$, *за винятком скінченного числа точок, причому* $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, *то а) якщо* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *збігається, то й* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *збігається, б) якщо* $\int\limits_a^b f(x)dx$ *розбігається, то й* $\int\limits_a^b g(x)dx$ *розбігається.*

Приклад. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_0^1 \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}}dx$.

Тут $0 \leq \frac{\cos^2 x}{\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$. Оскільки інтеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ $\left(\alpha = \frac{1}{2} < 1\right)$ збігається, то й даний інтеграл за ознакою порівняння збігається.

Теорема 2. (*гранична форма ознаки порівняння*). *Якщо функції* $f(x)$ *й* $g(x)$ *невід'ємні, неперервні* $\forall x \in [a,b)$ *й терплять нескінченний розрив у точці*

$x = b$; $\lim\limits_{x \to b-0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lambda(0 < \lambda < \infty)$, *то невласні* інтеграли від обох функцій сходяться або розходяться одночасно.

8.3. Приклади

1. Розглянемо $J = \int\limits_1^2 \dfrac{dx}{x \ln x}$; особлива точка $x = 1$. Інтеграл розбігається, тому що

$$J = \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{1+\varepsilon}^{2} \frac{d \ln x}{\ln x} = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln(\ln x)\Big|_{1+\varepsilon}^{2} = \lim_{\varepsilon \to 0}\left(\ln(\ln 2) - \ln(\ln(1+\varepsilon))\right) = +\infty .$$

2. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_0^1 \dfrac{e^x dx}{\sqrt[3]{1-x^3}}$.

Підінтегральна функція має особливу точку . Зрівняємо зі збіжним інтегралом $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt[3]{1-x}}$ $\left(\alpha = \dfrac{1}{3} < 1\right)$, тоді:

$$\lim_{x \to 1-0} \frac{\dfrac{e^x}{\sqrt[3]{1-x^3}}}{\dfrac{1}{\sqrt[3]{1-x}}} = \lim_{x \to 1-0} \frac{e^x \sqrt[3]{1-x}}{\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{1+x+x^2}} = \frac{e}{\sqrt[3]{3}} .$$

Звідси випливає збіжність розглянутого інтеграла.

3. $\int\limits_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{x} - \sin x}$. Особлива точка $x=0$. Знаменник підінтегральної функції $\sqrt{x} - \sin x \underset{x \to 0}{\sim} \sqrt{x}$, тому виберемо $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ $\left(\alpha = \dfrac{1}{2} < 1\right)$,

Одержимо $\lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x} - \sin x}}{\dfrac{1}{\sqrt{x}}} = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - \sin x} = \lim\limits_{x \to +0} \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$. Значить, досліджуваний інтеграл збігається.

Невласні інтеграли другого роду від знакозмінних функцій досліджуються аналогічно невласним інтегралам першого роду.

4. Дослідити збіжність інтеграла $\int\limits_0^1 \dfrac{\sin \frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$.

Розглянемо $\int\limits_0^1 \left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\right| dx$. Тут $\left|\frac{\sin\frac{1}{x}}{\sqrt[3]{x}}\right| \le \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $\alpha = \frac{1}{3} < 1$, звідси випливає абсолютна збіжність невласного інтеграла.

5. Дослідити збіжність інтеграла $I = \int\limits_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2} dx$.

Маємо $\ln x < 0$ при $0 < x < 1$, тому представимо вихідний інтеграл у вигляді $I = -\int\limits_0^1 \frac{-\ln x}{1-x^2} dx$. Особливі точки підінтегральної функції: $x = 0$ і $x = 1$ належать проміжку $[0;1]$. Знайдемо $\lim\limits_{x\to 1-0} \frac{\ln x}{1-x^2} \left|\frac{0}{0}\right| = \lim\limits_{x\to 1-0} \frac{\frac{1}{x}}{-2x} = -\frac{1}{2}$.

Виходить, підінтегральна функція обмежена в околі точки $x = 1$.

Обчислимо при $0 < \alpha < 1$

$$\lim_{x\to+0} \frac{\frac{-\ln x}{1-x^2}}{\frac{1}{x^\alpha}} = -\lim_{x\to+0} \frac{1}{1-x^2} \cdot \lim_{x\to+0} \ln x \cdot x^\alpha \left|\infty \cdot 0\right| = -\lim_{x\to+0} \frac{\ln x}{x^{-\alpha}} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+0} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha\, x^{-\alpha-1}} =$$

$$= \lim_{x\to+0} \frac{x^\alpha}{\alpha} = 0.$$

Підінтегральна функція в околі точки $x = 0$ має порядок росту нижчий, ніж нескінченно велика в цьому околі функція $\frac{1}{x^\alpha}$ ($0 < \alpha < 1$), виходить, досліджуваний інтеграл збігається.

6. Обчислити невласні інтеграли або встановити їх розбіжність.

$$I = \int\limits_0^1 \frac{dx}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}}$$

$x = 1$ - особлива точка, підінтегральна функція

$$\frac{1}{1-x^2+2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}}\left(\frac{1}{\sqrt{1-x^2}+2}\right) \underset{x\to 1}{=} 0^*\left(\frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \Rightarrow$$

інтеграл збігається, тому що $\int\limits_a^b \frac{dx}{(b-x)^\alpha}$ при $\alpha = \frac{1}{2} < 1$ збігається.

Заміна $x = \sin t$, тоді $dx = \cos t dt$.

$$I = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{\cos t dt}{\cos^2 t + 2\cos t} = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{dt}{\cos t + 2} \left| \begin{matrix} z = tg\frac{t}{2} & \cos t = \frac{1-z^2}{1+z^2} \\ dt = \frac{2dz}{1+z^2} & \end{matrix} \right| = 2\int\limits_0^1 \frac{dz}{\left(1+z^2\right)\left(\frac{1-z^2}{1+z^2}+2\right)} =$$

$$= 2\int\limits_0^1 \frac{dz}{z^2+3} = \frac{2}{\sqrt{3}} arctg \frac{z}{\sqrt{3}}\Big|_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}.$$

7. Дослідити збіжність інтеграла $I = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{ln\sin x}{\sqrt{x}}dx$.

$$\int\limits_0^{\pi/2} \frac{ln\sin x}{\sqrt{x}}dx = \left| \begin{matrix} u = ln\sin x & dv = \frac{dx}{\sqrt{x}} \\ du = \frac{\cos x dx}{\sin x} & v = 2\sqrt{x} \end{matrix} \right| = 2\sqrt{x}\, ln\sin x\Big|_0^{\pi/2} - 2\int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{x}\frac{\cos x}{\sin x}dx =$$

$$= -2\int\limits_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{x}\cos x}{\sin x}dx$$

Тут $\lim\limits_{x\to 0} \sqrt{x}\, ln\sin x = 0$, а $\frac{\sqrt{x}\cos x}{\sin x} \underset{x\to 0}{=} 0^*\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$. Виходить, інтеграл збігається.

8. Обчислити площу фігури між лінією $y = \frac{a}{a^2+x^2}$ і її асимптотою.

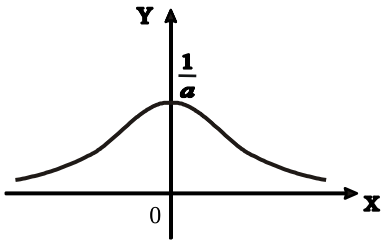

Рис. 8.3

Асимптота має рівняння $y=kx+b$, де $k = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{a}{(a^2+x^2)x} = 0$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{a}{a^2+x^2} = 0$, тобто $y=0$ – горизонтальна асимптота.

Розв'язання.

У силу симетрії (Рис.8.3) площа половини фігури дорівнює $\frac{S}{2} = \int\limits_0^\infty \frac{adx}{a^2+x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} a\int\limits_0^A \frac{dx}{a^2+x^2} = \lim\limits_{A\to+\infty} arctg\frac{x}{a}\Big|_0^A = \cdot \lim\limits_{A\to+\infty}(arctg\frac{A}{a} - arctg 0) = (\frac{\pi}{2}-0) = \frac{\pi}{2}$, де $\lim\limits_{A\to+\infty} arctg\frac{A}{a} = \frac{\pi}{2}$ $(a>0)$; $\Rightarrow S=\pi$.

Розділ 9

ФУНКЦІЯ ДЕКІЛЬКОХ ЗМІННИХ

9.1. Основні поняття

Означення 1. *Змінна z називається функцією двох незалежних змінних x і y, визначеною на множині D, якщо кожній парі (x, y) їхніх значень із D за певним законом ставиться у відповідність одне або кілька значень змінної z: позначають $z = f(x, y)$.*

Означення 2. *Множина пар чисел (x, y), для яких функція z визначена, називається областю визначення функції.*

Множина значень z називається областю зміни функції.

Приклад 1.

Знайти область визначення функції $z = ln(y^2 – 4x + 8)$.

Розв’язання.

Областю визначення даної функції є множина точок площини, що задовольняють умові

$y^2 – 4x + 8 > 0$ або $y^2 > 4(x – 2)$.

Парабола розбиває площину на дві частини, для однієї з яких виконується дана нерівність.

Областю визначення є зовнішня стосовно параболи частина площини, що не включає саму параболу (Рис.9.1).

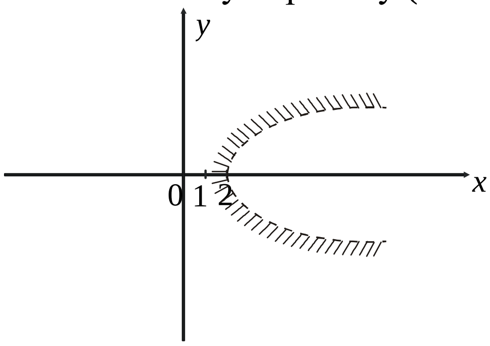

Рис. 9.1

Приклад 2. Знайти область визначення функції $z = \sqrt{4 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$

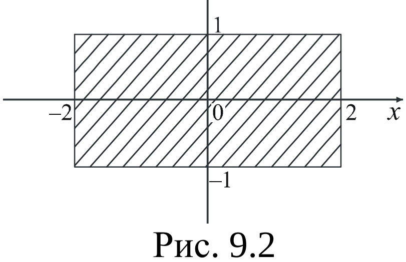

Рис. 9.2

Розв’язання.

Маємо $\begin{cases} 4 - x^2 \ge 0 \\ 1 - y^2 \ge 0 \end{cases}$ або $\begin{cases} |x| \le 2 \\ |y| \le 1 \end{cases}$

Область визначення — прямокутник, обмежений прямими $x = \pm 2$, $y = \pm 1$ (Рис.9.2).

Поняття границі функції

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена у деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, крім, може, самої точки M_0.

Означення. Число A називається границею функції $z = f(x, y)$ при наближенні точки $M(x, y)$ до точки $M_0(x_0, y_0)$, якщо $\forall \varepsilon < 0\ \exists \delta > 0$, що для всіх точок $M(x, y)$, крім, може, точки M_0, для яких виконується нерівність $\rho(M_0, M) < \delta$, має місце нерівність $|f(x, y) - A| < \varepsilon$,

де $\rho(M_0, M) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

Записують $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = A.$

Із самого означення випливає, що границя не залежить від способу наближення точки M до точки M_0.

Приклади

1) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \left(x^2 + y^2\right) = 0$

2) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} |y = kx| = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{kx}{x^2 + k^2 x^2} = \dfrac{k}{1 + k^2}$

Надаючи k різні значення, тобто при наближенні точки до початку координат вздовж різних прямих, одержимо різні границі. Це означає, що дана границя не існує.

Неперервність. Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякому околі точки $M_0(x_0, y_0)$, включаючи саму точку M_0.

Означення 1. *Функція $z = f(x, y)$ називається неперервною в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо*

$$\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Означення 2. *Функція $z = f(x, y)$ називається неперервною в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$, що для всіх точок $M(x, y)$, що задовольняють умові $\rho(M_0, M) < \delta$, має місце нерівність $|f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon$.*

Повний приріст функції $z = f(x, y)$ у т. M_0 дорівнює $\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$, де Δx й Δy — прирости аргументів.

Покладемо $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, одержимо

$$\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) \text{ або } \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \left[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \right] = \lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0$$

Означення 3. *Функція $z = f(x, y)$ називається неперервною в точці $M_0(x_0, y_0)$, якщо нескінченно малим приростам аргументів x і y відповідає нескінченно малий приріст z, тобто* $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta z = 0.$

9.2. Частинні похідні

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в деякій області D.

Нехай т. $M_0(x_0, y_0) \in D$; дамо приріст Δx, залишаючи y постійним. Тоді функція $z = f(x, y)$ одержить приріст

$\Delta z = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$, $(x_0 + \Delta x, y_0) \in D$, що називається частинним приростом функції по x.

Означення. *Границя відношення при $\Delta x>0$*

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f\left(x_0+\Delta x, y_0\right)-f\left(x_0, y_0\right)}{\Delta x}=\frac{\partial z}{\partial x},$$

якщо вона існує й скінченна, називається частинною похідною функції $z = f(x, y)$ по змінній x.

Частинні похідні по x позначають одним із символів

$$\frac{\partial z}{\partial x},\ z_x,\ \frac{\partial f\left(x, y\right)}{\partial x},\quad f_x'\left(x, y\right).$$

Аналогічно визначається частинна похідна по y:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f\left(x_0, y_0+\Delta y\right)-f\left(x_0, y_0\right)}{\Delta y}.$$

Частинна похідна є звичайною похідною, обчисленою в припущенні, що змінюється лише змінна, по якій виконується диференціювання, інші аргументи вважаються постійними.

Приклад 1.

$$z = x^{\lg y};\ \frac{\partial z}{\partial x}=\lg y\cdot x^{\lg y-1};\ \frac{\partial z}{\partial y}=x^{\lg y}\ \frac{\ln x}{y\ln 10}.$$

Приклад 2.

$$z = x^4 + 3xy^2 + 6y;\ \frac{\partial z}{\partial x}=4x^3+3y^2;\ \frac{\partial z}{\partial y}=6xy+6.$$

9.3. Диференційованість функції

Означення. *Функція $z = f(x, y)$ називається диференційованою у точці (x, y), якщо її повний приріст у цій точці можна представити у вигляді*

$\Delta z = A(x, y)\Delta x + B(x, y)\Delta y + \alpha_1\Delta x + \alpha_2\Delta y$, де $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha_1=0,\ \lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\alpha_2=0.$

Теорема. *Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційована в точці (x, y), то вона має в цій точці похідні* $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, при цьому

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}\left(x, y\right)\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\left(x, y\right)\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y.$$

9.3.1. Диференціал

Повним диференціалом функції $z = f(x, y)$ називається головна частина приросту функції $dz=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$, де $d_x z=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x,\ d_y z=\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ — частинні диференціали відповідно за змінними x і y.

Нехай $z = x$, тоді $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial x}{\partial x}=1,\ \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial x}{\partial y}=0.$ Звідси одержуємо $dx = \Delta x$; аналогічно $dy = \Delta y$.

Повний диференціал можна записати у вигляді $dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial y}{\partial y}dy.$

Приклади.

1). Знайти повний диференціал функції
$z=x^y$.

$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}; \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x;$

$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = yx^{y-1}dx + x^y \ln x dy.$

2) Знайти повний диференціал функції $z = \operatorname{arctg}^3 \frac{x}{y}$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{y} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} \cdot \frac{1}{y}; \frac{\partial z}{\partial y} = 3\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{y} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2}\left(-\frac{x}{y^2}\right);$$

$$dz = 3\operatorname{arctg}^2 \frac{x}{y} \cdot \frac{1}{x^2+y^2}(ydx - xdy).$$

9.3.2. Застосування повного диференціала в наближених обчисленнях

Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційована в точці (x, y), то її повний приріст у цій точці можна представити у вигляді $\Delta z = dz + \alpha\Delta\rho$, де $\lim\limits_{\Delta\rho \to 0} \alpha = 0, \Delta\rho = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Звідси випливає, що $\Delta z \approx dz$ або

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}\Delta y.$$

При досить малих Δx й Δy похибка може бути зроблена як завгодно малою.

Приклад.

Обчислимо наближено $\sqrt{(4,05)^2 + (2,93)^2}$.

Розглянемо функцію $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, покладемо $x_0 = 4$, $y_0 = 3$, тоді $\Delta x = 0.05$; $\Delta y = -0.07$ й $f(4;3) = \sqrt{16+9} = 5$.

Знайдемо частинні похідні:

$$f'_x = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f'_x(4;3) = \frac{4}{5};\quad f'_y = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f'_y(4;3) = \frac{3}{5}.$$

Одержимо $\sqrt{4,05^2 + 2,93^2} \approx 5 + 0,8 \cdot 0,05 - 0,07 \cdot 0,6 = 4,998$

9.4. Геометричні зображення функції двох змінних

Нехай функція $z = f(x, y)$ визначена в області D. Кожній точці $M(x, y) \in D$ відповідає певне значення функції $z = f(M)$. Приймаючи це значення z за аплікату деякої точки $N(x, y, z)$, одержимо, що кожній точці $M \in D$ відповідає певна точка N простору. Сукупність точок являє собою (можливі виключення) деяку поверхню.

Більше зручним є метод ліній рівня.

Лінією рівня функції $z = f(x, y)$ називається геометричне місце точок площини XOY, у яких функція $z = f(x, y)$ приймає постійне значення, тобто $z = f(x, y) = c$..

По лініях рівня можна судити про поверхні. Покладаючи c рівним: c, $c + h$, $c + 2h$, …, ми одержимо множину ліній рівня, за взаємним розташуванням яких можна судити про характер зміни функції. Рідкіші (при постійному h) лінії рівня вказують на більш повільну зміну функції.

Приклад.

Накреслити лінії рівня функції $z=xy$, надаючи значення від –3 до 3 через 1 (рис. 9.4)

Розв'язання.

При $z = h$ $(h\neq 0)$ лініями рівня є гіперболи $xy = h$. При $h = 0$ — осі координат $x = 0$, $y = 0$.

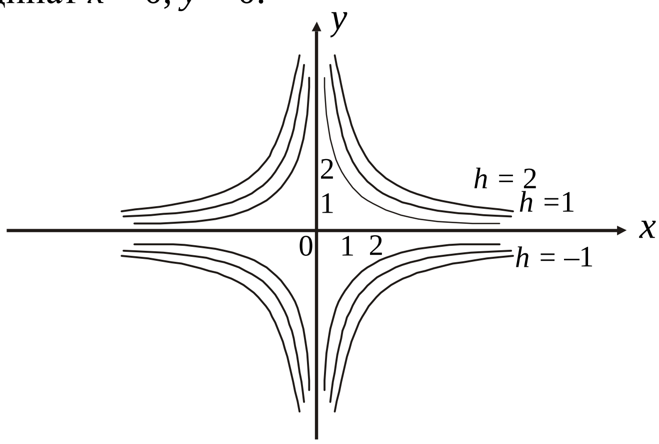

Рис. 9.3

9.5. Частинні похідні вищих порядків

Частинні похідні функції декількох змінних є функціями тих же змінних. Ці функції, у свою чергу, можуть мати частинні похідні, які називаються *другими частинними похідними* (або *частинними похідними другого порядку*) вихідної функції.

Так, наприклад, функція $z = f(x, y)$ двох змінних має чотири частинних похідних другого порядку, які визначаються й позначаються в такий спосіб:

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f''_{x^2}(x,y);\ \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f''_{xy}(x,y);$$

$$\frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f''_{yx}(x,y);\ \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f''_{y^2}(x,y).$$

Аналогічно визначаються й позначаються частинні похідні третього й більш високого порядку функції декількох змінних: *частинною похідною* n-

го порядку функції декількох змінних називається частинна похідна першого порядку від частинної похідної (n–1) -го порядку тієї ж функції.

Наприклад, частинна похідна третього порядку $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}$ функції $z = f(x, y)$ є частинна похідна першого порядку по y від частинної похідної другого порядку $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$:

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right)}{\partial y}.$$

Частинна похідна другого або більше високого порядку, узята по декількох різних змінних, називається *мішаною частинною похідною*.

Наприклад, частинні похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial z \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial z \partial y^2}$, $\frac{\partial^3 z}{\partial z \partial y \partial x}$ є мішаними частинними похідними функції двох змінних $z = f(x, y)$.

Приклад.

Знайти мішані частинні похідні другого порядку функції $z = x^2 y^3$.

Розв’язання.

Знаходимо частинні похідні першого порядку

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^3, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2 y^2.$$

Потім знаходимо мішані частинні похідні другого порядку

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\partial y} = \left(2xy^3\right)'_y = 6xy^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)}{\partial x} = \left(3x^2 y^3\right)'_x = 6xy^2.$$

Ми бачимо, що мішані частинні похідні даної функції $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ і $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, що відрізняються між собою лише порядком диференціювання, тобто послідовністю, у якій виконується диференціювання по різних змінних, виявилися тотожно рівними.

Приклад.

Знайти частинні похідні z'_x, z'_y, z'_{xx}, z''_{yy}, z''_{xy}, якщо $z = 2x^2 + \frac{x}{y} - \cos^2\sqrt{y}$.

При знаходженні частинних похідних по x вважаємо, що y постійне і навпаки.

$$z'_x = 4x + \frac{1}{y},$$

$$z'_y = -\frac{x}{y^2} + 2\cos\sqrt{y}\sin\sqrt{y}\,\frac{1}{2\sqrt{y}} = -\frac{x}{y^2} + \frac{\sin\left(2\sqrt{y}\right)}{2\sqrt{y}},$$

$$z''_{xx} = 4,$$

$$z''_{yy}=\frac{2x}{y^3}+\frac{\cos 2\sqrt{y}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\sqrt{y}-\sin\left(2\sqrt{y}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{y}}}{2y}=$$

$$=\frac{2x}{y^3}+\frac{2\sqrt{y}\cos 2\sqrt{y}-\sin\left(2\sqrt{y}\right)}{4y^{3/2}}.$$

9.6. Диференціювання складних функцій

Нехай $z = f(x, y)$ — диференційована функція своїх аргументів x та y, а x та y, у свою чергу, є функціями від деякого аргументу t. Тоді складна функція $z = z(t)=f(x(t), y(t))$ також диференційована, а її похідна знаходиться за формулою

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}. \qquad (9.6.1)$$

Якщо x та y залежать від декількох змінних, наприклад $x(u, v)$, $y(u, v)$, то формули частинних похідних складної функції $z = z(u, v)=f(x(u, v), y(u, v))$ мають аналогічний вигляд:

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u};\;\; \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}. \qquad (9.6.2)$$

Похідні складних функцій, що залежать від більшого числа аргументів, знаходяться за аналогічними правилами. Наприклад, якщо $u = f(x, y, z)$, а x, y, z самі є функціями від якихось змінних $t, s, \ldots$, то

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}. \qquad (9.6.3)$$

Якщо x, y, z залежать тільки від t, то в цій формулі частинні похідні по t заміняють на звичайні:

$$\frac{du}{dt}=\frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{dz}{dt}. \qquad (9.6.4)$$

Приклад 1.

Знайти $\frac{dz}{dt}$, якщо $z = x^2+xy+y^2$, де $x = t^2$, $y = t^3$.

Розв’язання.

За формулою (9.6.1) маємо

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}=\left(2x+y\right)2t+\left(x+2y\right)3t^2=$$

$$=\left(2t^2+t^3\right)2t+\left(t^2+2t^3\right)3t^2=4t^3+5t^4+6t^5.$$

Той же результат можна одержати й іншим шляхом; спочатку виразити z явно через t, а потім знайти похідну отриманої функції:

$z = z(t) = (t^2)^2 + t^2\cdot t^3 + (t^3)^2 = t^4 + t^5 + t^6$;

$$\frac{dz}{dt}=4t^3+5t^4+6t^5.$$

Приклад 2.

Задано складну функцію $z = f(x, y)$, де $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$.Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial u}$ и $\frac{\partial z}{\partial v}$.

$$z=\sqrt{x-y+3xy},\begin{cases}x=4u-\cos(uv)\\ y=\text{tg}^2\left(u-v^2\right)\end{cases}.$$

Маємо: $z = z(x, y) = z(x(u,v), y(u, v))$;

$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$, тоді $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1+3y}{2\sqrt{x-y+3xy}}$; $\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-1+3x}{2\sqrt{x-y+3xy}}$

$\frac{\partial x}{\partial v}=4+\sin(u\cdot v)v$; $\frac{\partial x}{\partial u}=\sin(uv)u$; $\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{2\text{tg}\left(u-v^2\right)}{\cos^2\left(u-v^2\right)}$; $\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{-4\text{tg}\left(u-v^2\right)}{\cos^2\left(u-v^2\right)}v$;

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{1}{2\sqrt{x-y+3xy}}\left((1+3y)\left(4+\sin(uv)v\right)+(3x-1)\frac{2tg\left(u-v^2\right)}{\cos^2\left(u-v^2\right)}\right);$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{1}{2\sqrt{x-y+3xy}}\left((1+3y)\left(s\text{in}(uv)u\right)-4(3x-1)\frac{tg\left(u-v^2\right)}{\cos^2\left(u-v^2\right)}v\right).$$

Приклад 3.

Задано функцію $z=e^{5x-y}+\sqrt{t}$, де $\begin{cases}x=\ln^2(t-1)\\ y=\ln(t^2+1)\end{cases}$.

Знайти повну похідну $\frac{dz}{dt}$.

Оскільки $z = z(x, y, t) = z(x(t), y(t), t)$, то $\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial z}{\partial t}$.

Тут $\frac{\partial z}{\partial x}=5e^{5x-y}$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-e^{5x-y}$, $\frac{\partial z}{\partial t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}$, $\frac{dx}{dt}=\frac{2\ln(t-1)}{t-1}$, $\frac{dy}{dt}=\frac{2t}{t^2+1}$.

$$\frac{dz}{dt}=e^{5x-y}\left(\frac{10\ln(t-1)}{t-1}-\frac{2t}{t^2+1}\right)+\frac{1}{2\sqrt{t}}.$$

9.7. Диференціювання неявних функцій

Якщо y э неявна функція однієї змінної x, що задана рівнянням $f(x, y)= 0$, то $\frac{dy}{dx}=y'=-\frac{f'_x}{f'_y}$. (9.7. 1)

Приклад 1.

Функція $y(x)$ задана рівнянням $1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy}) = 0$; знайти $\frac{dy}{dx}$ й $\frac{d^2y}{dx^2}$.

Розв’язання.

У цьому випадку $f(x, y) = 1 + xy - \ln(e^{xy} + e^{-xy})$, тому

$$f'_x=y-\frac{1}{e^{xy}+e^{-xy}}\left(e^{xy}-e^{-xy}\right)y=\frac{2ye^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}},$$

$$f'_y=x-\frac{1}{e^{xy}+e^{-xy}}\left(e^{xy}-e^{-xy}\right)x=\frac{2xe^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}};$$

отже,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-f'_x}{f'_y}=\frac{\dfrac{-2ye^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}}{\dfrac{2xe^{-xy}}{e^{xy}+e^{-xy}}}=-\frac{y}{x}.$$

Вважаючи в цій рівності y функцією від x і диференціюючи його, знайдемо другу похідну неявної функції. При цьому використаємо вже знайдений вираз першої похідної:

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{x\dfrac{dy}{dx}-y\cdot 1}{x^2}=-\frac{x\left(-\dfrac{y}{x}\right)-y}{x^2}=\frac{2y}{x^2}.$$

Функція z називається *неявною функцією* від x й y, якщо вона задається рівнянням не розв’язаним відносно z.

$$f(x, y, z) = 0, \qquad (9.7.2)$$

Це значить, що при кожних значеннях аргументів $x = x_0$ й $y = y_0$ з області визначення неявної функції, вона приймає таке значення z_0, для якого $f(x_0, y_0, z_0) = 0$. Якщо $f(x, y, z)$ — диференційована функція трьох змінних x, y, z і $f'_z(x,y,z)\neq 0,$ то задана рівнянням (9.7.2) функція $z = z(x, y)$ також диференційована, і її частинні похідні визначаються за формулами

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f'_x(x,y,z)}{f'_z(x,y,z)};\ \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f'_y(x,y,z)}{f'_z(x,y,z)}. \qquad (9.7.3)$$

Приклад 2.

Знайти частинні похідні функції $z(x, y)$, заданої рівнянням $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$

Розв’язання. У цьому випадку $f(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1,$

тому $f'_x=\frac{2x}{a^2},\ f'_y=\frac{2y}{b^2},\ f'_z=\frac{2z}{c^2};\ \frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{xc^2}{za^2},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{yc^2}{zb^2}.$

Приклад 3

Знайти частинні похідні функції $z(x, y)$, заданої рівнянням $x^y - y^z + \sin(yz^2) + a^2 = 0$.

Розв’язання.

Маємо $f(x, y, z) = x^y - y^z + \sin(yz^2) + a^2$,

тоді $f'_x=yx^{y-1},\quad f'_y=x^y\ln x-zy^{z-1}+\cos(yz^2)z^2,\ f'_z=-y^z\ln y+2\cos(yz^2)yz,$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{f'_x}{f'_z}=-\frac{yx^{y-1}}{-y^z\ln y+2\cos\left(yz^2\right)yz}=\frac{x^{y-1}}{y^{z-1}\ln y-2\cos\left(yz^2\right)z}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{f'_y}{f'_z}=-\frac{x^y\ln x-zy^{z-1}+\cos(yz^2)z^2}{-y^z\ln y+2\cos\left(yz^2\right)yz}.$$

9.8. Екстремум функції двох змінних

Функція $f(x, y)$ має максимум (мінімум) $f(x_0, y_0)$, якщо для всіх відмінних від M_0 точок $M(x,y)$ у досить малому околі точки M_0 виконується нерівність $f(x_0, y_0) > f(x, y)$ (або відповідно $f(x_0, y_0) < f(x, y)$).

Необхідні умови екстремуму

Точки, у яких диференційована функція $f(x, y)$ може досягати екстремуму (стаціонарні точки), є розв'язками системи рівнянь:

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}.$$

Достатні умови екстремуму

Нехай $M_0(x_0, y_0)$ — стаціонарна точка функції $f(x, y)$. Тоді, якщо позначити $A=f''_{xx}(x_0,y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0,y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0,y_0)$ й $\Delta = AC - B^2$, то

1) якщо $\Delta > 0$, функція має екстремум у точці $M_0(x_0, y_0)$, а саме максимум, якщо $A < 0$ й $\Delta > 0$, або мінімум, якщо $A > 0$ й $\Delta > 0$.

2) якщо $\Delta < 0$, то екстремуму в точці $M_0(x_0, y_0)$ немає.

3) якщо $\Delta = 0$, то потрібне подальше дослідження.

Приклад.

Дослідити на екстремум функцію $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Розв'язання. Маємо

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=3x^2+3y^2-15=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=6xy-12=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ xy=2 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x^2+y^2=5 \\ 2xy=4 \end{cases}.$$

$(x + y)^2 = 9$, $|x + y| = 3$, $x + y=\pm 3$, звідки одержуємо чотири стаціонарні точки. $M_1(1; 2)$, $M_2(2;1)$, $M_3(-1;-2)$, $M_4(-2; -1)$. Знайдемо

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=6y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6x.$$

Перевіряємо достатні умови екстремуму в кожній із точок.

1) у точці M_1: $A=\left.\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1}=6,\ B=\left.\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)\right|_{M_1}=12,\ C=\left.\left(\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)\right|_{M_1}=6,$

$\Delta = AC - B^2 = 36 - 144 < 0$. Виходить, у точці M_1 екстремуму немає.

2) У точці M_2: $A = 12$, $B = 6$, $C = 12$, $\Delta = 144 - 36 > 0$, і $A > 0 \Rightarrow$ $z_{min}(M_2)=z_{\min}(2;1)=8+6-30-12=-28;$

3) У точці M_3: $A = -6$, $B = -12$, $C = -6$, $\Delta = 36 - 144 <0$. Екстремуму немає.

4) У точці M_4: $A = -12$, $B = -6$, $C = -12$, $\Delta = 144 - 36 > 0$ й $A < 0 \Rightarrow$ $z_{\min}(M_4)=z_{\min}(-2;-1)=-8-6+30+12=28.$

9.9. Дотична площина й нормаль до поверхні

Дотичною площиною до поверхні в точці M називається площина, що містить у собі всі дотичні до кривих, проведених на поверхні через точку M.

Нормаллю до поверхні називається пряма, що проходить через точку дотику M і перпендикулярна дотичній площини.

Якщо поверхня задана рівнянням $F(x, y, z) = 0$ і точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ лежить на ній, то дотична площина до поверхні в точці M_0 визначається рівнянням

$$F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0; \tag{9.9.1}$$

нормаль до поверхні в точці M_0 (пряма, що проходить через точку M_0 перпендикулярно до дотичної площини) визначається рівняннями

$$\frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)} \qquad (9.9.2)$$

Приклад.

Скласти рівняння дотичної площини й нормалі до поверхні $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 14 = 0$ у точці $M_0(1; 2; 3)$.

Розв'язання.

Рівняння дотичної площини до поверхні $F(x, y, z) = 0$ має вигляд (9.9. 1).

Знайдемо частинні похідні: $F'_x(M_0)=2x_0=2,\ F'_y(M_0)=2y_0=4,$ $F'_z(M_0)=2z_0=2\cdot 3=6,$ де $x_0 = 1,\ y_0 = 2,\ z_0 = 3.$

Тоді одержимо рівняння дотичної площини

$2(x-1)+4(y-2)+6(z-3)=0$ або $x+2y+3z-14=0.$

Рівняння нормалі має вигляд (9.9. 2), тобто $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{4}=\frac{z-3}{6}$

або $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}.$

9.10. Похідна за напрямом

Розглянемо функцію $U = f(x, y, z)$ і знайдемо величину, що характеризує швидкість її зміни в деякій точці $M_0(x_0, y_0, z_0)\in D$ по напряму одиничного вектора $\vec{l}=(\cos\alpha;\cos\beta,\cos\gamma)$, де $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — напрямні косинуси вектора $\vec{l}$.

Позначимо через $M(x, y, z)\in D$ змінну точку на промені l (Рис.9.6.).

Означення. *Похідною функції $f(x, y, z)$ по напряму $\vec{l}$ в точці M_0 називається границя*

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\lim_{M\to M_0}\frac{f(M)-f(M_0)}{|MM_0|}.$$

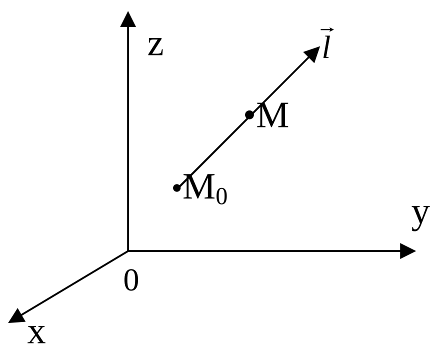

Рис. 9.5

Якщо напрям $\vec{l}$ збігається з додатним напрямом однієї з осей *OX*, *OY* або *OZ*, то $\frac{\partial f}{\partial l}$ є частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ або $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Має місце

Теорема. *Якщо функція $f(x, y, z)$ має в точці M_0 неперервні частинні похідні (тобто диференційована в точці M_0), то в точці M_0 існує похідна по будь-якому напряму, причому, ця похідна визначається формулою*

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma. \qquad (9.10.1)$$

Похідна $\frac{\partial U}{\partial l}$ характеризує *швидкість зміни величини $U(M)$ по напряму $\vec{l}$* .

Зокрема, якщо $U = f(x, y)$, то $\dfrac{\partial f}{\partial l} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cos\beta.$

Приклад 1.

Знайти похідну за напрямом бісектриси першого координатного кута в точці $M_0(1; 1)$ функції $U = x^3y - 5xy^2 + 1$.

Розв'язання.

Очевидно, що $\alpha = \beta = \dfrac{\pi}{4}$.

Знаходимо $\dfrac{\partial U}{\partial x} = 3x^2y - 5y^2$,

$\dfrac{\partial U}{\partial y} = x^3 - 10xy,$ отже, $\left.\dfrac{\partial U}{\partial x}\right|_{M_0} = -2,$ $\left.\dfrac{\partial U}{\partial y}\right|_{M_0} = -9,$ $\dfrac{\partial U}{\partial l} = -2\cos\dfrac{\pi}{4} - 9\cos\dfrac{\pi}{4} = -\dfrac{11}{\sqrt{2}}.$

Приклад 2.

Знайти похідну функції $U = xy^2z^3$ у точці $A(3; 2; 1)$ за напрямом вектора $\vec{a} = 2\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}.$

Розв'язання.

Запишемо формулу (9.10. 1) для похідної від функції U по напряму $\vec{a}$ в точці A:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \left.\left(\frac{\partial U}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_A$$

Частинні похідні: $\left.\dfrac{\partial U}{\partial x}\right|_A = \left.y^2z^3\right|_A = 4,$ $\left.\dfrac{\partial U}{\partial y}\right|_A = \left.2xyz^3\right|_A = 12,$ $\left.\dfrac{\partial U}{\partial z}\right|_A = \left.3xy^2z^2\right|_A = 36.$

Напрямні косинуси вектора $\vec{a}$ рівні $\cos\alpha = \dfrac{2}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \dfrac{2}{3};$ $\cos\beta = \dfrac{2}{3},$ $\cos\gamma = \dfrac{1}{3},$

де $|\vec{a}| = 3;$ звідси $\dfrac{\partial U}{\partial a} = 4\cdot\dfrac{2}{3} + 12\cdot\dfrac{2}{3} + 36\cdot\dfrac{1}{3} = 22\dfrac{2}{3}$.

9.11. Градієнт функції

Градієнт функції - міра зростання величини на одиницю довжини (латинськ. gradiens).

Нехай функція $f(x, y, z)$ визначена й диференційована в області D.

Означення 1. Вектор, проекції якого на координатні осі рівні відповідно частинним похідним функції $f(x, y, z)$, називається градієнтом функції $f(x, y, z)$

$$\mathrm{grad} f = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}.$$

Користуючись поняттям похідної за напрямом, одержимо деякі властивості градієнта.

Властивості градієнта

1. Перепишемо формулу (9.10. 1) для похідної за напрямом $\vec{l}$ у вигляді скалярного добутку

$\frac{\partial f}{\partial l}=\left(\text{grad}\, f, \vec{l}\right)=\left|\text{grad}\, f\right|\left|\vec{l}\right|\cos\varphi=\left|\text{grad}\, f\right|\cos\varphi,$ де $\left|\vec{l}\right|=1.$ Отже, $\frac{\partial f}{\partial l}=\left|\text{grad}\, f\right|\cos\varphi.$

Із цієї формули випливає, що похідна функції за напрямом $\vec{l}$ має найбільше значення, якщо $cos\varphi = 1$, тобто, якщо кут φ між векторами *grad f* й $\vec{l}$ у точці M_0 дорівнює *0*. У цьому випадку напрям $\vec{l}$ збігається з напрямом *grad f*.

Отже, якщо вектор $\vec{l}$ має напрям градієнта функції в даній точці, тобто $\vec{l} \uparrow\uparrow \text{grad}\, f$, то $\frac{\partial f}{\partial l}=\left|\text{grad}\, f\right|$ й приймає найбільше значення в даній точці.

Отриманий результат дозволяє тепер замість наведеного вище формального означення градієнта, пов'язаного з вибором системи координат, дати інше означення, що не залежить від вибору системи координат.

Означення 2. *Градієнтом функції U(M) називається вектор, спрямований убік найбільшого зростання функції й по модулю рівний похідній функції U по цьому напряму*. Причому, це найбільше значення дорівнює $\left|\text{grad}\, f\right|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$

2. Напрям градієнта збігається з напрямом нормалі до поверхні рівня $U(x, y, z) = C$, що проходить через дану точку.

3. Похідна функції за будь-яким напрямом, дотичним до поверхні рівня, дорівнює *0*.

4. $grad(C_1U_1 + C_2U_2) = C_1grad_1 + C_2grad_2;$

5. $grad(UV) = Ugrad + Vgrad;$

6. $\text{grad}\frac{U}{V}=\frac{\text{grad}U\ V-\text{gradV U}}{V^2}.$

Властивості 4-6 випливають безпосередньо з означення градієнта.

Приклад.

Знайти градієнт функції $z = ln(x^2 + y^2)$ у точці $A(3; 4)$.

Розв’язання.

$$grad\, z=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A\vec{i}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A\vec{j}.$$

Частинні похідні рівні: $\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A=\left.\frac{2x}{x^2+y^2}\right|_A=\frac{6}{25},\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A=\left.\frac{2y}{x^2+y^2}\right|_A=\frac{8}{25}.$

Підставимо значення частинних похідних у вираз для grad z:

$$\left.\text{grad}z\right|_A=\frac{6}{25}\vec{i}+\frac{8}{25}\vec{j}.$$

Розділ 10

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Диференціальним рівнянням називається співвідношення, що зв'язує незалежну змінну, невідому функцію і її похідні.

10.1. Диференціальні рівняння першого порядку

Загальний вид диференціального рівняння I порядку.

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (10.1.\ 1)$$

Припустимо, що рівняння (10.1.1) можна розв'язати відносно похідної. Тоді воно має вигляд:

$$y' = f(x, y) \qquad (10.1.\ 2)$$

Рівняння (10.1.2) називається рівнянням I порядку, розв'язаним відносно похідної. Рівняння першого порядку можна записати у вигляді:

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0.$

Задача, у якій потрібно знайти розв'язок рівняння $y' = f(x, y)$, який задовольняє початковій умові $y\big|_{x=x_0} = y_0$, називається *задачею Коші*.

Розв'язок, що задовольняє початковій умові, називається *частинним розв'язком* диференціального рівняння.

Теорема *існування й єдиності розв'язку задачі Коші:*

Якщо права частина f(x,y) рівняння $y' = f(x, y)$ і її частинна похідна по y $f'_y(x, y)$ визначені й неперервні в області D зміни x і y, то яка б не була внутрішня точка (x_0,y_0) цієї області, дане рівняння має єдиний розв'язок $y = \varphi(x)$, що приймає при x=x_0 задане значення y=y_0.

Геометрично це означає, що через кожну точку області *D* проходить (і притім тільки одна) інтегральна крива.

Загальним розв'язком диференціального рівняння I порядку називається функція $y = \varphi(x, C)$, що залежить від однієї довільної постійної C і задовольняє двом умовам:

1) функція $y = \varphi(x, C)$ є розв'язком рівняння при будь-яких допустимих значеннях постійної *C*;

2) вибором довільної постійної *C* можна задовольнити будь-якій початковій умові $y\big|_{x=x_0} = y_0$.

Співвідношення *Φ(x,y,C)=0*, що визначає загальний розв'язок в неявному виді, називається *загальним інтегралом* рівняння.

Частинним розв'язком диференціального рівняння (10.1. 1) називається розв'язок, одержуваний із загального розв'язок при якому-небудь певному значенні довільної C. Розв'язок задачі Коші, тобто розв'язок, що задовольняє початковим умовам, є частинним розв'язком.

Розглянемо методи інтегрування диференціального рівняння (10.1. 2) для окремих випадків правої частини *f*(*x*,*y*).

10.1.1. Рівняння з відокремлюваними змінними

Диференціальне рівняння $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ називається *рівнянням з відокремлюваними змінними*, коли кожна з функцій *P(x,y)* і *Q(x,y)* є добутком двох функцій, одна з яких – функція, що залежить тільки від *x*, а друга – тільки від *y*, тобто $P(x,y)=f_1(x)g_1(y)$, а $Q(x,y)=f_2(x)g_2(y)$.

Рівняння має вигляд : $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$.

Інтегрування даного рівняння виконується поділом змінних, що здійснюється діленням обох частин рівняння $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$ на добуток $g_1(y)f_2(x)$, у якому $g_1(y)$ – функція тільки від *y*, а $f_2(x)$ – функція тільки від *x*. Після ділення на цей добуток рівняння має вигляд: $\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=0.$

Це рівняння з розділеними змінними. Його загальний інтеграл запишеться так: $\int\frac{f_1(x)}{f_2(x)}dx+\int\frac{g_2(y)}{g_1(y)}dy=C$

Якщо рівняння $g_1(y)=0$ й $f_2(x)=0$ мають розв'язки, то рівняння $f_1(x)g_1(y)dx+f_2(x)g_2(y)dy=0$ може мати так називані особливі розв'язки, що не входять у загальний інтеграл.

Приклад 1. Розв'язати диференціальне рівняння $(x^2+1)(y^2-1)dx+xydy=0$.

Рівняння з відокремлюваними змінними . Розділивши обидві його частини на $(y^2-1)x$, одержимо рівняння $\frac{x^2+1}{x}dx+\frac{y}{y^2-1}dy=0$, що після інтегрування дає $\frac{x^2}{2}+\ln|x|+\frac{1}{2}\ln|y^2-1|=\ln|c|$. Потенціюючи, одержимо $y^2=1+\frac{ce^{-x^2}}{x^2}$ – загальний інтеграл.

Диференціальне рівняння з *відокремлюваними змінними* можна представити також у вигляді $y'=f_1(x)f_2(y),$ права частина якого є добуток двох множників, кожний з яких є функцією тільки одного аргументу. Перепишемо рівняння у вигляді $\frac{dy}{dx}=f_1(x)f_2(y)$, тоді $\frac{dy}{f_2(y)}=f_1(x)dx$.

Інтегруючи його почленно, одержимо $\int\frac{dy}{f_2(y)}=\int f_1(x)dx+c$ – загальний інтеграл рівняння.

Приклад 2. Знайти частинний розв'язок рівняння, що задовольняє початковій умові:

$$y'=\frac{y\ln y}{\sin x},\quad y\Big|_{x=\frac{\pi}{2}}=1.$$

Розв'язання. Рівняння запишемо у вигляді

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y\ln y}{\sin x}.$$

Розділяючи змінні, будемо мати: $\frac{dy}{y\ln y}=\frac{dx}{\sin x}$.

Інтегруючи, знаходимо $\ln|\ln y|=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\ln|c|$.

Після потенціювання одержимо загальний розв'язок

$\ln y = tg\frac{x}{2}\cdot c$ => $y = e^{tg\frac{x}{2}\cdot c}$

Використовуючи початкову умову, одержимо

$1 = e^{tg\frac{\pi}{4}\cdot c}$; $1 = e^{c} \Rightarrow c = 0$.

$y = e^{0} \Rightarrow y = 1$ – частинний розв'язок.

Диференціальні рівняння, що приводяться до рівнянь з відокремлюваними змінними**.**

Рівняння виду $y' = f(ax + by + c)$

приводиться до рівняння з відокремлюваними змінними

за допомогою підстановки $u = ax + by + c$, тоді $u' = a + by'$, $y' = \frac{u' - a}{b}, u = u(x)$.

Рівняння $y' = f(ax + by + c)$ приймає вигляд

$\frac{u' - a}{b} = f(u), u' = bf(u) + a$, $\frac{du}{dx} = bf(u) + a$ або $\frac{du}{bf(u) + a} = dx$,

Змінні розділені, інтегруючи, одержимо: $\int \frac{du}{bf(u) + a} = x + c.$

У загальному інтегралі потрібно перейти до старої змінної, покладаючи $u = ax + by + c$.

Приклад. $y' = (8x + 2y + 1)^2$.

Права частина рівняння є функція від $(8x + 2y + 1)$. Отже, підстановкою $u = 8x + 2y + 1$ рівняння приводиться до рівняння з відокремлюваними змінними $u' = 8 + 2y', y' = \frac{u' - 8}{2}.$

Одержимо рівняння

$\frac{u' - 8}{2} = u^2, u' = 2u^2 + 8, \frac{du}{2u^2 + 8} = dx,$

інтегруючи яке знаходимо загальний інтеграл

$\frac{1}{2}\int \frac{du}{u^2 + 2^2} = \int dx, \frac{1}{2\cdot 2} arctg\frac{u}{2} = x + c, \frac{1}{4} arctg\frac{8x + 2y + 1}{2} = x + c.$

10.1.2. Однорідні диференціальні рівняння

Однорідним диференціальним рівнянням І порядку називається рівняння виду

$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$

де $P(x, y)$ й $Q(x, y)$ – однорідні функції одного виміру (або порядку).

Функція $P(x, y)$ називається однорідною функцією своїх аргументів *m*-го виміру, якщо $\forall t$ $P(tx, ty) = t^m P(x, y).$

Якщо *m = 0,* $P(tx, ty) = P(x, y),$ то функція $P(x, y)$ є однорідною функцією нульового виміру.

Взявши в якості $t = \frac{1}{x}$, одержимо: $P(tx, ty) = P(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y) = P(1, \frac{y}{x}) = Y(\frac{y}{x}),$

тобто однорідну функцію нульового виміру можна представити як функцію відношення $\frac{y}{x}$.

Рівняння $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ можна записати у вигляді $\frac{dy}{dx}=-\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$,

де права частина рівняння є однорідною функцією нульового виміру. Таким чином, однорідне рівняння можна записати у вигляді:

$y'=f(\frac{y}{x}), x\neq 0$.

Приклади однорідних функцій:

$P(x,y)=x^2+2xy+3y^2$, $P_1(x,y)=x-2y$.

Дійсно, $P(tx,ty)=(tx)^2+2(tx)(ty)+3(ty)^2=t^2(x^2+2xy+3y^2)=t^2P(x\ ,y)\ \ (m=2)$;

$P_1(tx,ty)=tx-2(ty)=t(x-2y)=t^1P_1(x,y)\quad (m=1)$.

За допомогою заміни змінної $\frac{y}{x}=U$, де $U=U(x)$, рівняння $y'=f(\frac{y}{x}), x\neq 0$ приводиться до рівняння з відокремлюваними змінними**.**

$y=Ux,\quad y'=U'x+U$.

Підставляючи ці вирази в рівняння, знайдемо $U'x+U=f(U)$ або $U'x=f(U)-U$. Розділяючи змінні й інтегруючи, одержимо загальний інтеграл рівняння:

$$\int\frac{dU}{f(U)-U}=\int\frac{dx}{x},$$

$$\int\frac{dU}{f(U)-U}=\ln|x|+\ln|C|, \text{ або } \int\frac{dU}{f(U)-U}=\ln|xC|$$

Зауваження: при діленні на різницю $f(U)-U$ ми припускаємо, що $f(U)-U\neq 0$. Якщо ж існують корені рівняння $f(U)-U=0$, наприклад, $U_1,U_2,...,U_n$, тоді $y_i=U_ix(i=\overline{1,n})$ розв'язки, які можуть бути загублені при діленні. Графіки функцій $y_i=U_ix(i=\overline{1,n})$ – прямі, що проходять через початок координат на площині *xoy*.

Нехай загальний інтеграл рівняння $y'=f(\frac{y}{x}), x\neq 0$ має вигляд $\Phi(x,U,C)=0$.

Повертаючись від *u* до *y* с допомогою формули $U=\frac{y}{x}$, одержимо:

$\Phi(x,\frac{y}{x},C)=0$ – загальний інтеграл рівняння.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $y'=\frac{x}{y}+2\frac{y}{x}$.

При заміні $\frac{y}{x}=U$, де $U=U(x)$, маємо $y=Ux, y'=U'x+U$. Одержимо диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними**,** щодо функції $U(x)$:

$U'x+U=\frac{1}{U}+2U$, або $x\frac{dU}{dx}=\frac{1+U^2}{U},\frac{UdU}{1+U^2}=\frac{dx}{x}$,

яке після інтегрування дає

$\int\frac{UdU}{1+U^2}=\int\frac{dx}{x},\ \frac{1}{2}\ln(1+U^2)=\ln|Cx|,\ \sqrt{1+U^2}=Cx,1+U^2=C^2x^2,1+\frac{y^2}{x^2}=C^2x^2.$

Виходить, $y=\pm x\sqrt{C^2x^2-1}$ – загальний розв'язок рівняння.

Диференціальні рівняння, що приводяться до однорідних рівнянь

Рівняння виду $y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ приводяться до однорідного диференціального рівняння за допомогою заміни змінної. Варто помітити, що якби $c_1\,i\,c_2$ були рівні нулю, то рівняння було б однорідним. Рівняння $a_1x+b_1y+c_1=0$ й $a_2x+b_2y+c_2=0$ визначають дві прямі. Для знищення в рівняннях прямих вільних членів, треба перенести початок координат у точку перетину цих прямих. Розв'язуючи систему рівнянь: $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$, знайдемо точку перетину прямих (x_0,y_0).

Заміна змінних $\xi=x-x_0,\eta=y-y_0,\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{dy}{dx}$ приводить до рівняння $\frac{d\eta}{d\xi}=f\left(\frac{a_1\xi+b_1\eta}{a_2\xi+b_2\eta}\right)$. Це однорідне диференціальне рівняння.

Викладений метод не можна застосовувати, якщо прямі паралельні. Але в цьому випадку коефіцієнти при поточних координатах пропорційні $\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=k$ й диференціальне рівняння може бути записане у вигляді: $y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{k(a_1x+b_1y)+c_2}\right)$

Отже, заміна змінних $z=a_1x+b_1y$ перетворить рівняння в рівняння з відокремлюваними змінними**.**

Приклад. $y'=\frac{x-y+1}{x+y-3}$. Розв'язуючи систему рівнянь, $\begin{cases}x-y+1=0\\x+y-3=0\end{cases}$, знайдемо $x_0=1$, $y_0=2$.

Покладаючи $\xi=x-1,\eta=y-2$, будемо мати $\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi-\eta}{\xi+\eta}$ або $\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{1-\eta/\xi}{1+\eta/\xi}$.

Отримане рівняння є однорідним. Заміна $U=\frac{\eta}{\xi}$ або $\eta=U\xi$ приводить до рівняння з відокремлюваними змінними відносно U

$U+\xi\frac{dU}{d\xi}=\frac{1-U}{1+U}$;

Розділяємо змінні й інтегруємо:

$\xi\frac{dU}{d\xi}=\frac{1-U}{1+U}-U;\int\frac{(1+U)dU}{1-2U-U^2}=\int\frac{d\xi}{\xi};\ -\frac{1}{2}\ln\left|U^2+2U-1\right|=\ln|\xi|-\frac{1}{2}\ln|c|\Rightarrow(U^2+2U-1)\xi^2=C;$

Підставимо $U=\frac{\eta}{\xi}$, тоді $-\xi^2+2\xi\eta+\eta^2=C$.

Повертаючись до змінних x, y, знайдемо $x^2 - 2xy - y^2 + 2x + 6y = C$ – загальний інтеграл рівняння.

10.1.3. Лінійні диференціальні рівняння

Диференціальне рівняння називається *лінійним*, якщо воно лінійне щодо шуканої функції у й її похідної y', тобто якщо воно може бути записане у вигляді

$$y' + p(x)y = q(x),$$

де р*(х)* і q*(х)* – неперервні функції.

Якщо q*(х)*$\equiv 0$, то рівняння називається однорідним; якщо *q(x)* ≠0, то рівняння називається неоднорідним, або лінійним рівнянням із правою частиною.

Рівняння $y' + p(x)y = 0$, отримане з рівняння $y' + p(x)y = q(x)$, заміною функції q*(х)* нулями, називається лінійним однорідним рівнянням, що відповідає даному неоднорідному рівнянню.

Це рівняння з відокремлюваними змінними.

Розділяючи змінні й інтегруючи, знаходимо:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx, \ln|y| = -\int p(x)dx + \ln|c|,,$$

$y = ce^{-\int p(x)dx}$, де c – довільна стала.

І метод розв'язування лінійного неоднорідного рівняння (ЛНР) – метод варіації довільної постійної.

Відповідно до методу варіації розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді $y = ce^{-\int p(x)dx}$, вважаючи $c=c(x)$, тобто $y = c(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}$.

Знайдемо $c(x)$ таким чином, щоб задовольнялося рівняння $y' + p(x)y = q(x)$

$$c'(x)e^{-\int p(x)dx} - c(x)e^{-\int p(x)dx}p(x) + p(x)\cdot c(x)e^{-\int p(x)dx} = q(x).$$

Функцію $c(x)$ визначимо з рівняння $c'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x)$, тоді $c(x) = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + c$.

Виходить, загальний розв'язок диференціального рівняння $y' + p(x)y = q(x)$ дорівнює $y = ce^{-\int p(x)dx}\cdot\left(\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c\right)$.

Отже, загальний розв'язок лінійного неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння $ce^{-\int P(x)dx}$ й частинного розв'язку неоднорідного рівняння $e^{-\int p(x)dx}\cdot\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx$, одержаного із загального при $c=0$.

Приклад. Знайти загальний розв'язок рівняння $\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$.

Знаходимо загальний розв'язок відповідного однорідного рівняння

$$\frac{dy}{dx} + y = 0, \frac{dy}{y} = -dx, \int\frac{dy}{y} = -\int dx, \ln|y| = -x + \ln|c| \text{ або } \ln|y| = \ln e^{-x} + \ln|c|,$$

звідси знаходимо $y = ce^{-x}$ – загальний розв'язок однорідного рівняння. Покладаючи $c=c(x)$, знаходимо загальний розв'язок неоднорідного рівняння. Підставляємо $y = c(x)\cdot e^{-x}$ у вихідне рівняння:

$$c'(x)e^{-x} - c(x)e^{-x} + c(x)e^{-x} = e^{-x} \Rightarrow c'(x) = 1, c(x) = x + c.$$

Тоді $y = (x+c)e^{-x}$ – загальний розв'язок неоднорідного рівняння.

II метод розв'язання ЛНР – метод Бернуллі.

За методом Бернуллі розв'язок шукається у вигляді добутку двох функцій: $y = u(x)v(x)$,тоді $y' = u'v + uv'$. Підставляючи y й y' в рівняння $y' + p(x)y = q(x)$, одержимо $u'v + uv' + p(x)uv = q(x)$ або $u'v + u(v' + p(x)v) = q(x)$.

Для відшукання двох функцій $u(x)$ і $v(x)$ є одне рівняння, тому одне із співвідношень між ними вибираємо довільно.

Нехай $v(x)=e^{-\int p(x)dx}$ – частинний розв'язок рівняння $v' + p(x)v = 0$, тоді функція $u(x)$ може бути знайдена з рівняння з відокремлюваними змінними.

$$u' = \frac{q(x)}{v} \Rightarrow u' = q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}.$$

Загальний розв'язок ЛДР І порядку має вигляд, отриманий методом варіації.

Приклад. $(x^2+1)y' + xy = x(x^2+1)$ або $y' + \dfrac{x}{x^2+1}y = x$.

Тут $p(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$; $q(x) = x$.

Знайдемо $v(x)$: $v' = -\dfrac{x}{x^2+1}\cdot v$; $\dfrac{dv}{v} = -\dfrac{xdx}{x^2+1}$; $\ln|v| = -\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$; $v = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

Тепер знайдемо $u(x)$: $u' = x\sqrt{x^2+1}$; $du = x\sqrt{x^2+1}dx$; $u = \dfrac{1}{3}(x^2+1)^{3/2} + c$.

Розв'язок вихідного рівняння: $y = \dfrac{1}{3}(x^2+1) + \dfrac{c}{\sqrt{x^2+1}}$.

10.1.4. Рівняння Бернуллі

$$y' + p(x)y = q(x)y^n \quad (n \neq 0, n \neq 1).$$

Рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння за допомогою заміни змінної. Розділимо почленно рівняння на y^n: $y^{-n}y' + p(x)y^{1-n} = q(x)$ і зробимо заміну змінної $y^{1-n} = z(x)$. Тоді $z' = (1-n)y^{-n}y'$. Відносно z одержимо неоднорідне лінійне рівняння $z' + p(x)(-n+1)z = (-n+1)q(x)$.

Нехай $\Phi(x,y,z) = 0$ – його загальний інтеграл, тоді, підставляючи $z = y^{-n+1}$, одержимо загальний розв'язок вихідного рівняння: $\Phi(x, y^{-n+1}, c) = 0$.

Приклад $y' + xy = x^3y^3$ $(n = 3)$.

Розв'язування.

Підстановкою $z = y^{-2}$ рівняння Бернуллі зводиться до лінійного рівняння $z' - 2xz = -2x^3$.

Відшукуючи розв'язок його у вигляді $z = uv$, одержимо $u'v + uv' - 2xuv = -2x^3$, тоді функцію v визначимо з рівняння $v' = 2xv$, $\frac{dv}{v} = 2xdx$, $\ln|v| = x^2$, $v = e^{x^2}$. Функцію $u(x)$ знайдемо з рівняння $u' = -2x^3 e^{-x^2}$,

$$u = -2\int x^3 e^{-x^2} dx = \left| \begin{matrix} x^2 = t \\ dt = 2xdx \end{matrix} \right| = -\int te^{-t} dt = te^{-t} + \int e^{-t} dt = x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + c,$$

виходить $z = y^{-2} = (x^2 e^{-x^2} + e^{-x^2} + c)e^{x^2} = x^2 + 1 + ce^{x^2}$.

10.2. Диференціальні рівняння другого порядку, що допускають зниження порядку

Загальний вид диференціального рівняння другого порядку $F(x, y, y', y'') = 0$.

Його *загальний розв'язок* містить дві довільні сталі й має вигляд $y = y(x, c_1, c_2)$.

Задача Коші для рівняння другого порядку ставиться в такий спосіб: знайти розв'язок рівняння, що задовольняє умовам: $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$.

Типи рівнянь другого порядку, що допускають зниження порядку:

1) $y'' = f(x)$, тоді $y' = \int f(x)dx + c_1, y = \int(\int f(x)dx + c_1)dx + c_2$ – загальний розв'язок.

Приклад: $y'' = \sin x$, тоді $y' = -\cos x + c_1; y = -\sin x + c_1 x + c_2$.

2) Рівняння явно не містить y: $f(x, y', y'') = 0$.

Покладаємо $y' = p,\ p = p(x),\ \ y'' = p'$, тоді відносно p одержимо рівняння першого порядку $f(x, p, p') = 0$.

Приклад: $xy'' = y', y' = p, y'' = p'$. Одержимо рівняння першого порядку $xp' = p$, звідки $\frac{dp}{p} = \frac{dx}{x}, \ln|p| = \ln|c_1 x|,\ p = c_1 x$. Підставляємо замість p його значення $\frac{dy}{dx}$, що дає $dy = c_1 xdx$ або $y = c_1 \frac{x^2}{2} + c_2$.

3) Рівняння явно не містить x, тобто рівняння виду $F(y, y', y'') = 0$. Інтегрується заміною $y' = p,\ p = p(y), y'' = p'p$, що приводить до рівняння першого порядку відносно p: $F(y, p, p'p) = 0$.

Приклад 1. $y'' = 2yy', y' = p, y'' = p'p$; одержимо рівняння

$$p\frac{dp}{dy} = 2yp,\ \ p\left(\frac{dp}{dy} - 2y\right) = 0;$$

а) $p=0$, $y=c$ (не є загальним розв'язком)

б) $\frac{dp}{dy} = 2y; dp = 2ydy;\ p = y^2 + c_1; \int \frac{dy}{y^2 + c_1} = \int dx$;

Якщо $c_1>0$, то $\frac{1}{\sqrt{c_1}} arctg \frac{y}{\sqrt{c_1}} = x + c_2$, а якщо $c_1<0$, то

$$\frac{1}{2\sqrt{-c_1}} \ln\left|\frac{y - \sqrt{-c_1}}{y + \sqrt{-c_1}}\right| = x + c_2.$$

Приклад 2. $yy'' - 2(y')^2 = 0$. Рівняння не містить явно x.

Заміна $y' = p(y) \Rightarrow y'' = p\dfrac{dp}{dy} \Rightarrow yp\dfrac{dp}{dy} - 2p^2 = 0$.

а) $p \neq 0;\quad y\dfrac{dp}{dy} = 2p$. Це рівняння з відокремлюваними змінними **.**

$\dfrac{dp}{p} = 2\dfrac{dy}{y} \Rightarrow p = c_1 y^2$.

Заміняючи p на y', знову одержуємо рівняння першого порядку $y' = c_1 y^2$. Розділяючи змінні й інтегруючи, знаходимо загальний розв'язок рівняння:

$\dfrac{dy}{y^2} = c_1 dx \Rightarrow y = \dfrac{-1}{c_1 x + c_2}$.

б) $p=0 \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow y=c$ – теж є розв'язком вихідного диференціального рівняння, що не може бути отримане зі знайденого загального розв'язку ні при яких значеннях довільних сталих c_1, c_2. Таким чином, розв'язок $y=c$ не є частинний розв'язок даного рівняння.

10.3. Лінійні однорідні диференціальні рівняння

Диференціальні рівняння виду

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)y = 0, \qquad (10.3.\ 1)$$

де $a_i(x)\quad (i = \overline{l,n})$ – деякі функції, називаються однорідними лінійними диференціальними рівняннями n-го порядку (ЛОДР).

Функції $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ *називаються лінійно, незалежними, якщо з рівності нулю їхньої лінійної комбінації, тобто, з рівності*

$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) + \ldots + \alpha_n y_n(x) = 0$ *витікає, що* $\alpha_i = 0\ \ (i = 1, n)$.

Якщо хоча б один з коефіцієнтів лінійної комбінації $\alpha_i \neq 0$, *то функції називаються лінійно залежними.*

Фундаментальною системою розв'язків рівняння (10.3. 1), *називають будь-які* n *лінійно незалежних розв'язків.*

Нехай $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ – розв'язки диференціального рівняння n-го порядку.

Визначник $W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y' & y' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$ називається визначником *Вронського*.

Якщо $W(x)$ *розв'язків* $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ *тотожно дорівнює нулю, то ці розв'язки лінійно залежні. Якщо* $W(x)$ *не дорівнює нулю у жодній точці, то це означає, що розв'язки лінійно незалежні й становлять фундаментальну систему розв'язків*. Будь-яке однорідне лінійне рівняння з неперервними коефіцієнтами має фундаментальну систему розв'язків.

Якщо $y_1(x), y_2(x), \ldots y_n(x)$ – фундаментальна система розв'язків однорідного лінійного рівняння, то його загальний розв'язок має вигляд

$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2(x) + ... + c_n y_n(x)$,
де $c_1, c_2, ... c_n$ – довільні сталі.

10.3.1. Лінійні однорідні диференціальні рівняння зі сталими коефіцієнтами

ЛОДР зі сталими коефіцієнтами має вигляд

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (10.3.\ 2)$$

де a_i – сталі $(i = \overline{1,n})$.

Оскільки шукана функція y й її похідні $y^{(i)} (i = \overline{1,n})$ входять у рівняння лінійно, розв'язок даного рівняння шукається у вигляді $y = e^{\lambda x}$, тому що похідні показникової функції відрізняються від неї тільки постійним множником: $y^{(k)} = \lambda^k e^{\lambda x}$.

Підставивши $e^{\lambda x}$ в рівняння, одержимо $e^{\lambda x}(\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n) = 0$.

Оскільки $e^{\lambda x} \neq 0$, а коефіцієнти $a_i = const$, то знаходження фундаментальної системи розв'язків рівняння (10.3. 2) зводиться до алгебраїчних операцій, а саме до розв'язання алгебраїчного рівняння n-го степеня:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$$

Це рівняння називається *характеристичним* рівнянням диференціального рівняння.

Характеристичне рівняння як алгебраїчне рівняння n-го степеня має n коренів (дійсних або комплексних) $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$.

При розв'язуванні характеристичного рівняння можливі випадки:

1. Корені характеристичного рівняння – *дійсні* й *різні*, тоді диференціальне рівняння (10.3. 2) має n лінійно незалежних частинних розв'язків:

$y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}, ..., y_n = e^{\lambda_n x}$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (10.3.2) має вигляд:

$y(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + ... + c_n e^{\lambda_n x}$

Приклад 1. $y' + y'' - 2y = 0$.

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ має $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 1$ – дійсні різні корені.

Лінійно незалежні частинні розв'язки мають вигляд: $y_1(x) = e^{-2x}, \quad y_2(x) = e^x$.

Тоді загальний розв'язок диференціального рівняння є їхня лінійна комбінація $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$.

2. Корені характеристичного рівняння дійсні, але серед них є кратні. Нехай $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_k = \lambda$, тобто λ − дійсний корінь кратності k, інші корені характеристичного рівняння $\lambda_{k+1}, \lambda_{k+2}, ..., \lambda_n$ – дійсні й різні. Тоді дійсному

кореню λ кратності k відповідає k частинних лінійно незалежних розв'язків диференціального рівняння (10.3. 2.):

$y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = xe^{\lambda x}, ..., y_k = x^{k-1}e^{\lambda x}$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (10.3.2.) має вигляд:

$y(x) = c_1e^{\lambda x} + c_2xe^{\lambda x} + ... + c_kx^{k-1}e^{\lambda x} + c_{k+1}e^{\lambda_{k+1}x} + ... + c_ne^{\lambda_n x}$.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок ЛОДР.

$y^{v} - 9y''' = 0$.

Характеристичне рівняння має вигляд:

$\lambda^5 - 9\lambda^3 = 0$ або $\lambda^3(\lambda^2 - 9) = 0$.

Корені рівняння: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_4 = -3$, $\lambda_5 = 3$.

Корінь $\lambda_1 = 0$ – кратності три, корені $\lambda_4 = -3$, $\lambda_5 = 3$ – прості. Відповідні лінійно незалежні частинні розв'язки:

$y_1 = 1$, $y_2 = x$, $y_3 = x^2$, $y_4 = e^{-3x}$, $y_5 = e^{3x}$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння

$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-3x} + c_5e^{3x}$,

де $c_i (i = \overline{1,5})$ – довільні сталі.

3. Серед коренів характеристичного рівняння, крім дійсних, є й комплексно-спряжені, але немає кратних коренів.

Нехай $\lambda_1 = \alpha + i\beta$, $\lambda_2 = \alpha - i\beta$.

Цим комплексно-спряженим кореням відповідають два частинні лінійно незалежні розв'язки диференціального рівняння: $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$, $y_2 = e^{\alpha x}\sin\beta x$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (10.3.2.) має вигляд:

$y(x) = c_1e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2e^{\alpha x}\sin\beta x + c_3e^{\lambda_3 x} + ... + c_ne^{\lambda_n x}$.

Приклад 3. Знайти загальний розв'язок ЛОДР:

$y^{vI} - 2y^{Iv} - y'' + 2y = 0$.

Характеристичне рівняння: $\lambda^6 - 2\lambda^4 - \lambda^2 + 2 = 0$.

Очевидно, що $\lambda_1 = 1$ і $\lambda_2 = -1$ є коренями рівняння. Розділимо ліву частину рівняння на $\lambda^2 - 1$, тоді $\lambda^6 - 2\lambda^4 - \lambda^2 + 2 = (\lambda^2 - 1)(\lambda^4 - \lambda^2 - 2)$.

Знаходимо корені рівняння

$\lambda^4 - \lambda^2 - 2 = 0$

$\lambda_{3,4} = \pm\sqrt{2}$; $\lambda_{5,6} = \pm i$.

Парі комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння відповідають два частинні лінійно незалежні розв'язки:

$y_5 = \cos x$, $y_6 = \sin x$.

Інші частинні розв'язки:

$y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^{+\sqrt{2}x}$, $y_4 = e^{-\sqrt{2}x}$

відповідають дійсним кореням характеристичного рівняння.

Загальний розв'язок:

$y(x) = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3e^{\sqrt{2}x} + c_4e^{-\sqrt{2}x} + c_5\cos x + c_6\sin x$.

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$4y'' - 8y' + 5y = 0$.

Характеристичне рівняння: $4k^2 - 8k + 5y = 0$,

$k_{1,2} = 1 \pm \frac{1}{2} i$, $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$.

Два лінійно незалежні частинні розв'язки:

$y_1 = e^x \sin\frac{x}{2}$; $y_2 = e^x \cos\frac{x}{2}$.

Загальний розв'язок рівняння

$y(x) = e^x (c_1 \sin\frac{x}{2} + c_2 \cos\frac{x}{2})$.

Приклад 5. Знайти частинний розв'язок ЛОДР:

$y''' = -y'$; $y(0) = 2$; $y^0(0) = 0$; $y''(0) = -1$.

Характеристичне рівняння:

$\lambda^3 + \lambda = 0$, $\lambda(\lambda^2 + 1) = 0$, $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i$, $\lambda_3 = -i$.

Загальний розв'язок рівняння: $y(x) = c_1 + c_2 \cos x + c_3 \sin x$.

Знаходимо: $y'(x) = -c_2 \sin x + c_3 \cos x$,

$y''(x) = -c_2 \cos x - c_3 \sin x$.

Задовольняючи початковим умовам одержимо три рівняння для відшукання сталих c_1, c_2, c_3:

$y(0) = 2 \quad \Rightarrow \quad c_1 + c_2 = 2$

$y'(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_3 = 0$

$y''(0) = -1 \quad \Rightarrow \quad -c_2 = -1; \Rightarrow c_2 = 1; c_1 = 1.$

Підставляючи знайдені сталі в загальний розв'язок, одержимо частинний розв'язок: $y = 1 + \cos x$.

Серед коренів характеристичного рівняння є кратні комплексно-спряжені корені. Нехай $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ й $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ – пара комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння кратності *k*. Тоді парі комплексно-спряжених коренів характеристичного рівняння кратності *k* відповідає 2*k* лінійно незалежних частинних розв'язків диференціального рівняння:

$y_1 = e^{\alpha x} \cos\beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin\beta x$,

$y_3 = x e^{\alpha x} \cos\beta x, y_4 = x e^{\alpha x} \sin\beta x$

…………………………………

$y_{2k-1} = x^{k-1} e^{\alpha x} \cos\beta x, y_{2k} = x^{k-1} e^{\alpha x} \sin\beta x$

іншим кореням характеристичного рівняння відповідають *n*-2*k* частинних лінійно незалежних розв'язків виду: $y_{k+1} = e^{\lambda_{2k+1} x}, ..., y_n = e^{\lambda_n x}$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння (10.3.2) має вигляд:

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} \cos\beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin\beta x + x(c_3 e^{\alpha x} \cos\beta x + c_4 e^{\alpha x} \sin\beta x) + ...$$
$$+ x^{k-1}(c_{2k-1} e^{\alpha x} \cos\beta x + c_{2k} e^{\alpha x} \sin\beta x) + c_{2k+1} e^{\lambda_{2k+1} x} + ... + c_n e^{\lambda_n x}.$$

Приклад 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

$64 y^{VIII} + 48 y^{VI} + 12 y^{IV} + y'' = 0$

Характеристичне рівняння

$64\lambda^8 + 48\lambda^6 + \lambda^4 + \lambda^2 = 0 => \lambda^2 (64\lambda^6 + 48\lambda^4 + 12\lambda^2 + 1) = 0 => \lambda^2 = 0, (4\lambda^2 + 1)^3 = 0$

Корені характеристичного рівняння:

$\lambda_1=\lambda_2=0$, $\lambda_3=\lambda_4=\lambda_5=\frac{1}{2}i$, $\lambda_6=\lambda_7=\lambda_8=-\frac{1}{2}i$.

Частинні лінійно незалежні розв'язки диференціального рівняння:

$y_1=1$, $y_2=x$, $y_3=\sin\frac{1}{2}x$, $y_4=\cos\frac{1}{2}x$, $y_5=x\sin\frac{1}{2}x$, $y_6=x\cos\frac{1}{2}x$, $y_7=x^2\sin\frac{1}{2}x$,

$y_8=x^2\cos\frac{1}{2}x$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння:

$$y(x)=c_1+c_2x+c_3\sin\frac{1}{2}x+c_4\cos\frac{1}{2}x+x(c_5\sin\frac{1}{2}x+c_6\cos\frac{1}{2}x)+x^2(c_7\sin\frac{1}{2}x+c_8\cos\frac{1}{2}x).$$

Сформулюємо загальне правило розв'язку ЛОДР зі сталими коефіцієнтами:

1. Складемо характеристичне рівняння й відшукаємо його корені.
2. Знайдемо частинні розв'язки даного диференціального рівняння, при цьому:

а) кожному простому дійсному кореню λ характеристичного рівняння відповідає розв'язок $e^{\lambda x}$,

б) кожному *k-кратному* дійсному кореню λ характеристичного рівняння відповідають k розв'язків:

$e^{\lambda x}, xe^{\lambda x},..., x^{k-1}e^{\lambda x}$,

в) Кожній парі простих комплексно-спряжених коренів $\alpha\pm i\beta$ характеристичного рівняння ставляться у відповідність два розв'язки

$e^{\alpha x}\sin\beta x$ и. $e^{\alpha x}\cos\beta x$

г) кожній парі *k-кратних* комплексно-спряжених коренів ставляться у відповідність $2k$ розв'язків

$e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x,..., x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,$

$e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x,..., x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$.

Можна довести, що отримана в такий спосіб множина розв'язків утворить фундаментальну систему розв'язків рівняння.

10.4. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку. Метод варіації довільних сталих

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння 2-го порядку:

$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x)$ (ЛНДР) (10.4. 1)

Відповідне йому лінійне однорідне диференціальне рівняння 2-го порядку:

$y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ (ЛОДР) (10.4. 2)

За теоремою про структуру загального розв'язку ЛНДР загальний розв'язок диференціального рівняння (10.4.1) має вигляд:

$y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\tilde{y}(x)$,

де $y_1(x)$ й $y_2(x)$ – лінійно незалежні частинні розв'язки диференціального рівняння (10.4. 2), а $\tilde{y}(x)$ – який-небудь частинний розв'язок диференціального рівняння (10.4. 1); c_1, c_2 – довільні постійні.

Для відшукання загального розв'язку ЛНДР (10.4.1) розглянемо метод варіації довільних постійних.

1. Знаходимо загальний розв'язок ЛОДР (10.4.2.)

$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x), \qquad (10.4.\ 3)$$

де $y_1(x)$ й $y_2(x)$ – лінійно незалежні частинні розв'язки диференціального рівняння (10.4. 2), c_1, c_2– довільні сталі.

2. Запишемо загальний розв'язок ЛНДР (10.4.1) у формі (10.4.3)

$$y(x) = c_1(x) y_1(x) + c_2(x) y_2(x), \qquad (10.4.\ 4)$$

де $c_1(x)$ й $c_2(x)$ – невідомі функції. Функції $c_1(x)$ й $c_2(x)$ підберемо так, щоб функція $y(x)$ була розв'язком диференціального рівняння (10.4. 1).

3. Для визначення $c_1(x)$ й $c_2(x)$ необхідно розв'язати систему лінійних неоднорідних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} c_1'(x) y_1(x) + c_2'(x) y_2(x) = 0 \\ c_1'(x) y_1'(x) + c_2'(x) y_2'(x) = f(x) \end{cases} \qquad (10.4.\ 5)$$

Із системи рівнянь (10.4. 5) $c_1'(x)$ і $c_2'(x)$ визначаються єдиним чином, тому що визначник системи

$$W[y_1(x), y_2(x)] = \begin{vmatrix} y_1(x) y_2(x) \\ y_1'(x) y_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0,$$

функції $y_1(x)$ й $y_2(x)$ – лінійно незалежні.

Нехай $c_1'(x) = \varphi_1(x)$ й $c_2'(x) = \varphi_2(x)$. Тоді $c_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + c_1$, $c_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + c_2$, де c_1 й c_2 постійні інтегрування.

4. Знайдені $c_1(x)$ й $c_2(x)$, підставимо в співвідношення (10.4. 4) і одержимо загальний розв'язок ЛНДР (10.4. 1).

$$y(x) = \left(\int \varphi_1(x)dx + c_1\right) y_1(x) + \left(\int \varphi_2(x)dx + c_2\right) y_2(x)$$

або $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + y_1(x)\int \varphi_1(x)dx + y_2(x)\int \varphi_2(x)dx$. (10.4.6)

У співвідношенні (10.4. 6) $c_1 y_1(x)$ + $c_2 y_2(x)$ - загальний розв'язок ЛОДР (10.4. 2), а функція $\tilde{y}(x) = y_1(x)\int \varphi_1(x)dx + y_2(x)\int \varphi_2(x)dx$ - частинний розв'язок ЛНДР (10.4. 1).

П р и к л а д 1. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння

$$y'' - y = \frac{e^x}{1+e^x}. \qquad (10.4.\ 7)$$

Відповідне однорідне диференціальне рівняння $y'' - y = 0$

Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1$.

Отже, фундаментальна система розв'язків є $y_1 = e^{-x}, y_2 = e^x$.

Відповідно до методу варіації довільних постійних загальний розв'язок неоднорідного рівняння (10.4.7) шукаємо у вигляді

$$y = c_1(x) e^{-x} + c_2(x) e^x. \qquad (10.4.\ 8)$$

Для відшукання $c_1'(x)$ й $c_2'(x)$ запишемо систему рівнянь (10.4. 5)

$$\begin{cases} c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{x} = 0, \\ -c_1'(x)e^{-x} + c_2'(x)e^{x} = \dfrac{e^x}{1+e^x}. \end{cases}$$

Розв'яжемо систему рівнянь за формулами Крамера.
Визначник системи

$$\Delta = \begin{vmatrix} e^{-x} & e^x \\ -e^{-x} & e^x \end{vmatrix} = 2, .\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & e^x \\ \dfrac{e^x}{1+e^x} & e^x \end{vmatrix} = -\frac{e^{2x}}{1+e^x}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{-x} & 0 \\ -e^{-x} & \dfrac{e^x}{1+e^x} \end{vmatrix} = \frac{1}{1+e^x};$$

$$c_1'(x) = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{e^{2x}}{2\left(1+e^x\right)}; \quad c_2'(x) = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{2\left(1+e^x\right)}.$$

У результаті інтегрування знаходимо

$$c_1(x) = -\frac{1}{2}\int \frac{e^{2x}}{1+e^x}dx = -\frac{1}{2}\int \frac{(e^{2x}-1)+1}{1+e^x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{(e^x-1)(e^x+1)}{1+e^x}dx - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+e^x} = -\frac{1}{2}(e^x - x) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{1+e^x};$$

Знайдемо $\displaystyle\int \frac{dx}{1+e^x} = \int \frac{(1+e^x)-e^x}{1+e^x}dx = \int dx - \int \frac{d(1+e^{x)}}{1+e^x} = x - \ln(1+e^x)$.

Отже, $c_1(x) = -\dfrac{1}{2}(e^x - x) - \dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}\ln(1+e^x) = \dfrac{1}{2}(\ln(1+e^x) - e^x) + \tilde{c}_1$,

$$c_2(x) = \frac{1}{2}(x - \ln(1+e^x)) + \tilde{c}_2.$$

Підставляючи вирази для $c_1(x)$ й $c_1(x)$ в (10.4. 8), одержимо загальний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння

$$y(x) = \tilde{c}_1 e^{-x} + \tilde{c}_2 e^x + \frac{1}{2}\ln(1+e^x)(e^{-x} - e^x) + \frac{1}{2}xe^x - \frac{1}{2}.$$

10.5. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння n-го порядку з постійними коефіцієнтами і з правою частиною спеціального виду. Метод невизначених коефіцієнтів

Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння з постійними коефіцієнтами:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f(x), \qquad (10.5.\ 1)$$

де $a_i\,(i=\overline{1,n})$ – дійсні числа. Відповідне (10.5.1) ЛОДР:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = 0.$$

Загальний розв'язок ЛОДР має вигляд:

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

де c_i – довільні сталі $(i=\overline{1,n})$, а $y_i\,(i=\overline{1,n})$ – фундаментальна система розв'язків цього диференціального рівняння.

Загальний розв'язок ЛНДР (10.5.1)визначається формулою:

$$y(x) = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n + \tilde{y}(x),$$

де $\tilde{y}(x)$ – який-небудь частинний розв'язок (10.5. 1).

У попередньому параграфі був розглянутий загальний метод відшукання загального розв'язку ЛНДР − метод варіації довільних сталих.

Якщо $f(x)$ має спеціальний вигляд, то частинний розв'язок $\tilde{y}(x)$ може бути знайдено методом невизначених коефіцієнтів.

Метод невизначених коефіцієнтів дозволяє для так називаної спеціальної правої частини знайти частинний розв'язок неоднорідного диференціального рівняння без інтегрування.

Загальний вид спеціальної правої частини

$$f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_m(x)\sin\beta x), \qquad (10.5.\ 2)$$

де $P_n(x)$ й $Q_m(x)$ – поліноми степенів *n* і *m відповідно*, тобто

$$Pn(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_{n-1}x + c_n,$$

$$Q_m(x) = D_0 x^m + D_1 x^{m-1} + \ldots + D_{m-1}x + D_m,$$

α і β - дійсні числа.

Частинний розв'язок ЛНДР, що відповідає даній правій частини $f(x)$ шукаємо у вигляді

$$\tilde{y} = e^{\alpha x}(M_r(x)\cos\beta x + N_r(x)\sin\beta x)x^k, \qquad (10.5.\ 3)$$

де $M_r(x)$ й $N_r(x)$ – поліноми степеня *r* з невизначеними коефіцієнтами:

$$M_r(x) = A_0 x^r + A_1 x^{r-1} + \ldots + A_{r-1}x + A_r,$$

$$N_r(x) = B_0 x^r + B_1 x^{r-1} + \ldots + B_{r-1}x + B_r,$$

$r = \max(m, n)$;

k – кратність коренів $\alpha \pm i\beta$ характеристичного рівняння; якщо числа $\alpha \pm i\beta$ не є коренями характеристичного рівняння, то треба покласти $k=0$.

Для ЛНДР має місце *принцип накладення розв'язків*: якщо y_1 – *частинний розв'язок неоднорідного рівняння* із правою частиною $f_1(x)$, y_2 – *частинний розв'язок рівняння із правою частиною* $f_2(x)$, то сума $y_1 + y_2$ є *частинний розв'язок рівняння із правої частиною* $f_1(x) + f_2(x)$.

Таким чином, якщо ЛНДР має вигляд:

$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f_1(x) + f_2(x)$, то частинний розв'язок $\tilde{y}(x)$ цього рівняння можна представити у вигляді суми $\tilde{y}_1(x) + \tilde{y}_2(x)$, де $\tilde{y}_1(x)$ й $\tilde{y}_2(x)$ відповідні частинні розв'язки рівнянь:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f_1(x); \quad y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_n y = f_2(x).$$

Приклад 1**.** Знайти частинний розв'язок рівняння

$$y'' + 4y = \sin 2x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1 \qquad (10.5.\ 4)$$

Розглянемо ЛОДР $y'' + 4y = 0$, що відповідає даному неоднорідному.

Характеристичне рівняння:

$\lambda^2 + 4 = 0$, корені цього рівняння $\lambda_{1,2} = \pm 2i$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння $y_{0.0.} = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$.

Права частина рівняння $f(x) = \sin 2x$.

Виходячи із загального виду спеціальної правої частини (10.5.2) маємо:

$P_0(x) = 0, \quad Q_0(x) = 1, \ \alpha = 0, \ \beta = 2, \ r = 0$.

Числа $\alpha \pm i\beta = 0 \pm 2i = \pm 2i$ є корені характеристичного рівняння. Частинний розв'язок шукаємо у вигляді: $\tilde{y}(x) = (M\cos 2x + N\sin 2x)x$.

Тут числа $\pm 2i$ є простими коренями характеристичного рівняння $(k=1, r=0, r=\max(n,m)$, де $n=0, m=0)$. Підставимо функцію $\tilde{y}(x)$ і її похідні $\tilde{y}'(x)$, $\tilde{y}''(x)$ у рівняння (10.5. 4), одержимо:

$\tilde{y}' = -2Mx\sin 2x + 2xN\cos 2x + M\cos 2x + N\sin 2x$,

$\tilde{y}'' = -4M\sin 2x + 4N\cos 2x - 4xM\cos 2x - 4xN\sin 2x$.

Невизначені коефіцієнти M и N визначаємо з тотожності:

$-4M\sin 2x + 4N\cos 2x = \sin 2x$,

звідки прирівнюючи коефіцієнти при $\sin 2x$ й $\cos 2x$, одержимо систему

$$\begin{array}{l|l} \sin 2x & -4M = 1 \Rightarrow M = -\dfrac{1}{4}. \\ \cos 2x & \quad N = 0 \end{array}$$

Отже, частинний розв'язок: $\tilde{y}(x) = -\dfrac{1}{4}x\cos 2x$.

Загальний розв'язок диференціального рівняння:

$y(x) = y_{0.0.} + \tilde{y}(x)$ або $y(x) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x - \dfrac{1}{4}x\cos 2x$.

Для відшукування частинного розв'язку використаємо початкові умови $y(0) = 0 \Rightarrow c_1 = 0$.

Знаходимо $y'(x) = -2c_1\sin 2x + 2c_2\cos 2x - \dfrac{1}{4}\cos 2x + \dfrac{1}{2}x\sin 2x.$

З початкової умови $y'(0) = 1$ маємо $2c_2 - \dfrac{1}{4} = 1, c_2 = \dfrac{5}{8}$.

Отже, $y = \dfrac{5}{8}\sin 2x - \dfrac{1}{4}x\cos 2x$ – шуканий частинний розв'язок.

Приклад 2. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$y'' - 6y' + 13y = e^x(x^2 - 5x + 2)$.

Характеристичне рівняння: $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$, його корені $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння $y_{0.0.} = e^{3x}(c_1\cos 2x + c_2\sin 2x)$.

Права частина $f(x) = e^x(x^2 - 5x + 2),\ P_n(x) = x^2 - 5x + 2,\ \beta = 0,\ r = 2$.

Число $\alpha=1$ не є коренем характеристичного рівняння. Частинний розв'язок шукаємо у вигляді $\tilde{y}(x) = e^x(Ax^2 + Bx + C)$.

Невизначені коефіцієнти A, B, C визначаємо, диференціюючи двічі $\tilde{y}(x)$ й підставляючи у вихідне рівняння: (e^x скорочуємо)

$\tilde{y}'(x) = e^x(Ax^2 + Bx + C + 2Ax + B)$,

$\tilde{y}''(x) = e^x(Ax^2 + Bx + C + 4Ax + 2B + 2A)$,

$Ax^2 + Bx + C + 4Ax + 2B + 2A - 6(Ax^2 + Bx + C + 2Ax + B) + 13(Ax^2 + Bx + C) = x^2 - 5x + 2,$

або : $8Ax^2 + (8B - 8A)x + (8C - 4B + 2A) = x^2 - 5x + 2$

Прирівняємо коефіцієнти при однакових степенях x:

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 8A = 1 \Rightarrow A = \dfrac{1}{8}, \\ x^1 & 8B - 8A = -5 \Rightarrow B = -\dfrac{1}{2}, \\ x^0 & 8C - 4B + 2A = 2 \Rightarrow C = -\dfrac{1}{32}, \end{array}$$

одержимо: $\tilde{y}(x)=e^x\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{32}\right)$.

Маємо загальний розв'язок диференціального рівняння:

$y(x)=e^{3x}(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+\ e^x\left(\frac{1}{8}x^2-\frac{1}{2}x-\frac{1}{32}\right)$.

Приклад 3. Знайти розв'язок рівняння

$y''+y'=x^2+2x$

задовольняючий початковим умовам: $y(0)=4, y'(0)=-2$.

Відповідне однорідне рівняння

$y''+y'=0$.

Характеристичне рівняння

$\lambda^2+\lambda=0\Rightarrow\lambda_1=0,\lambda_2=-1$.

Загальний розв'язок однорідного рівняння: $y_{0.0.}=c_1+c_2e^{-x}$.

Права частина $f(x)=x^2+2x$, тоді $\alpha=\beta=0$.

Виходить, $\alpha\pm i\beta=0$ є простий корінь характеристичного рівняння, тобто $k=1$, тому частинний розв'язок шукаємо у виді: $\tilde{y}(x)=(Ax^2+Bx+C)x$.

Підставивши функцію $\tilde{y}(x)$ у вигляді:

$\tilde{y}(x)=Ax^3+Bx^2+Cx$ і її похідні $\tilde{y}'(x)=3Ax^2+2Bx+C$, $\tilde{y}''(x)=6Ax+2B$

у вихідне диференціальне рівняння, одержимо тотожність:

$6Ax+2B+3Ax^2+2Bx+C=x^2+2x$

Прирівнюючи коефіцієнти при однакових степенях x, знайдемо A, B, C

$$\begin{array}{l|l} x^2 & 3A=1, A=\frac{1}{3}, \\ x^1 & 6A+2B=2; B=0, \\ x^0 & 2B+C=0, C=0. \end{array}$$

Тоді $\tilde{y}(x)=\frac{1}{3}x^3$ – частинний розв'язок рівняння. Загальний розв'язок диференціального рівняння : $y(x)=c_1+c_2e^{-x}+\frac{1}{3}x^3$

Приклад 4. Знайти загальний розв'язок ЛНДР: $y''-y'-2y=e^x+e^{-2x}$,

$f_1(x)=e^x$, $f_2(x)=e^{-2x}$

Розглянемо відповідне ЛОДР: $y''-y'-2y=0$.

Характеристичне рівняння $\lambda^2-\lambda-2=0$, корені $\lambda_1=2,\lambda_2=-1$.

Частинний розв'язок ЛНДР шукаємо у вигляді $\tilde{y}(x)=\tilde{y}_1(x)+\tilde{y}_2(x)$, де $\tilde{y}_1(x)$ й $\tilde{y}_2(x)$ – відповідні частинні розв'язки диференціальних рівнянь:

$y''-y'-2y=e^x$, $y''-y'-2y=e^{-2x}$.

Частинні розв'язки цих диференціальних рівнянь відповідно рівні:

$\tilde{y}_1(x)=-\frac{1}{2}e^x$, $\tilde{y}_2(x)=\frac{1}{4}e^{-2x}$.

Частинний розв'язок ЛНДР: $\tilde{y}(x)=-\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{4}e^{-2x}$.

Загальний розв'язок ЛНДР: $y(x)=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}-\frac{1}{2}e^x+\frac{1}{4}e^{-2x}$.

Приклад 5. Знайти загальний розв'язок рівняння
$y'' - 6y' + 8y = 3e^{2x}$.
Відповідне однорідне рівняння: $y'' - 6y' + 8y = 0$.

Корені його характеристичного рівняння $\lambda^2 - 6\lambda + 8 = 0$
дорівнюють: $\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 4$.
Загальний розв'язок однорідного рівняння: $y_{0.0.} = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x}$

Знайдемо частинний розв'язок.
Порівняємо праву частину рівняння з (10.5. 2), одержимо $\alpha = 2, \beta = 0$. Число $\alpha \pm i\beta = 2$ є простий корінь характеристичного рівняння.
Тому частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді
$\tilde{y}(x) = Ae^{2x} \cdot x$, де $k = 1$.
$P_0(x)$ і $Q_0(x)$ – поліноми нульового степеня, у зв'язку із цим $r=0$ і коефіцієнт при e^{2x} беремо у вигляді константи. Знаходимо похідні $\tilde{y}'(x)$, $\tilde{y}''(x)$ і підставляємо їх у неоднорідне рівняння, що дає
$8Ax - 6A - 12Ax + 4A + 4Ax = 3$ (e^{2x} скорочується).
Звідси маємо $A = -\dfrac{3}{2}$, $\tilde{y}(x) = -\dfrac{3}{2} e^{-2x} \cdot x$.

Загальний розв'язок: $y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{4x} - \dfrac{3}{2} e^{2x} \cdot x$

Приклад 6. Записати вид частинних розв'язків неоднорідних диференціальних рівнянь.
а) $y'' + 4y = \sin 2x$
Корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = 2i$.
Аналізуємо праву частину: $f(x) = \sin 2x$, тоді $\alpha = 0, \ \beta = 2$, тобто $\alpha + i\beta = +2i$ є простими коренями характеристичного рівняння, тому частинний розв'язок має вигляд
$\tilde{y}(x) = (A\cos 2x + B\sin 2x)x$.
б) $y'' - 2y' + y = (6x^2 - 4)e^x$.
Характеристичне рівняння $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$.
Його корені $\lambda_{1,2} = 1$. Порівнюючи праву частину з (10.5. 2) визначаємо, що $\alpha = 1, \quad r = 2, \quad k = 2$. Отже, частинний розв'язок запишеться
$\tilde{y}(x) = e^x (Ax^2 + Bx + C)x^2$.
в) $y'' + 6y' + 9y = 2xe^{-3x} \sin x$.
Корені характеристичного рівняння
$\lambda_{1,2} = -3$. З правої частині маємо: $\alpha = -3, \quad \beta = 1, \quad r = 1$.
Вид частинного розв'язку $\tilde{y}(x) = e^{-3x}((Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x)$.
г) $y'' - 6y' + 13y = 8e^{3x} \sin 2x$.
Корені характеристичного рівняння $\lambda_{1,2} = 3 \pm 2i$.
З правої частині знаходимо: $\alpha = 3, \quad \beta = 2$, тобто $\alpha \pm i\beta = 3 \pm 2i$ – прості корені характеристичного рівняння: $r = 0, \quad k = 1$
Частинний розв'язок:

$$\widetilde{y}(x) = e^{3x}(A\cos 2x + B\sin 2x)x \ .$$

Розділ 11

ЧИСЛОВІ І ФУНКЦІОНАЛЬНІ РЯДИ

Числові ряди. Основні поняття. Необхідна ознака збіжності

Розглянемо послідовність чисел $a_1, a_2, ..., a_n, ...$.

Вираз $a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називають *числовим рядом*; a_n – *загальним членом ряду*.

Сума n перших членів ряду називається *n-ю частковою сумою* ряду $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

Ряд називається *збіжним*, якщо існує скінченна границя послідовності його часткових сум: $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$. Число S називають сумою ряду. Якщо границя послідовності часткових сум дорівнює нескінченності або взагалі не існує, то ряд *розбігається*. При розгляді числових рядів практично розв'язується дві задачі:

1) дослідити ряд на збіжність;
2) визначивши, що ряд збігається, знайти його суму.

Приклади. Користуючись визначенням, дослідити збіжність ряду та у випадку збіжності знайти його суму.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $a_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, тоді

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n(n+1)} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Очевидно, що границя послідовності часткових сум цього ряду існує і дорівнює 1:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 1, \quad S = \lim_{n\to\infty} S_n = 1.$$

Отже, ряд збігається і його сума дорівнює 1.

Приклад. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{24}{9n^2 - 12n - 5}$.

Розв'язання. Розкладемо загальний член ряду на найпростіші дроби:

$$a_n = \frac{24}{9n^2 - 12n - 5} = \frac{24}{(3n-5)(3n+1)} = \left\|(3n+1) - (3n-5) \equiv 6\right\| =$$
$$= 4\frac{(3n+1) - (3n-5)}{(3n-5)(3n+1)} = \frac{4}{(3n-5)} - \frac{4}{(3n+1)}.$$

Таким чином, $a_n = 4\left(\frac{1}{3n-5} - \frac{1}{3n+1}\right)$.

Отже,

$$S_n = 4\left(1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{4} - \frac{1}{10} + \frac{1}{7} - \frac{1}{13} + \ldots + \frac{1}{3n-11} - \frac{1}{3n-5} + \frac{1}{3n-8} - \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-5} - \frac{1}{3n+1}\right)$$

;

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = 4\left(1 + \frac{1}{4}\right) = 5.$$

Приклад. Ряд $1+1+\ldots+1+\ldots$ розбігається, тому що $S_n = n$ та $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n = +\infty$.

Приклад. Ряд $1-1+1-1+\ldots$ розбігається. Тут $S_1 = 1, S_2 = 0, S_3 = 1,$ $S_4 = 0, \ldots, S_{2n} = 0,$ $S_{2n-1} = 1$ і т.д., тому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не існує.

Приклад. Ряд *геометричної прогресії* $a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots$ $(a \neq 0)$ при $|q| < 1$ збігається, і його сума $S = \dfrac{a}{1-q}$; при $|q| \geq 1$ ряд розбігається.

Залишок ряду $r_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots + \ldots$ для збіжного ряду при $n \to \infty$ наближається до 0.

Необхідна ознака збіжності ряду. Якщо ряд збігається, то його загальний член наближається до нуля, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Звідси випливає, що якщо $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, то ряд розбігається. Якщо ж $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд може збігатися, а може і розбігатися.

Приклад. Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \frac{1}{n})$.

Розв'язання. Загальний член ряду $a_n = \ln(1 + \frac{1}{n})$;

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(1 + \frac{1}{n}) = 0$, тобто виконується необхідна ознака збіжності ряду.

Проте ряд розбігається, оскільки $a_n = \ln(n+1) - \ln n$, то

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \ln 2 - \ln 1 + \ln 3 - \ln 2 + \ldots + \ln n - \ln(n-1) + \ln(n+1) - \ln n =$$
$$= \ln(n+1);$$

отже,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty.$$

Можна показати, що *гармонічний* ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ також розбігається, незважаючи на те, що $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

11.2. Достатні ознаки збіжності рядів зі знакосталими членами

11.2.1. Ознаки порівняння

Теорема 1. (*ознака порівняння*). Нехай члени рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ додатні, й існує таке N, що при усіх $n > N$ $a_n \le b_n$. Тоді зі збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ випливає збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, і навпаки, із розбіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ випливає розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Теорема 2 (*гранична форма ознаки порівняння*). Нехай члени рядів $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ та $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ додатні, й існує $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = L\,(L \ne 0, L \ne \infty)$, тоді обидва ряди збігаються або розбігаються одночасно.

На практиці еталонами для порівняння виступають так званий узагальнений гармонічний ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$, що збігається при $p > 1$ і розбігається при $p \le 1$, а також ряд геометричної прогресії:

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^n - \begin{cases}\text{збігається, якщо } |q| < 1\\ \text{розбігається, якщо } |q| \ge 1\end{cases}.$$

Приклади. Дослідити збіжність рядів.

Приклад. Ряд $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$ розбігається, оскільки $\ln n < n, \frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$, але ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається $(p = 1)$.

Приклад. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+3)(n+5)}$ збігається за першою ознакою порівняння, тому що $\frac{1}{(n+3)(n+5)}<\frac{1}{n^2}$ і ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ збігається $(p=2>1)$.

Приклад. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{3(n^4+1)}$ збігається, бо взявши $a_n=\frac{n+2}{3(n^4+1)}$, $b_n=\frac{1}{n^3}$, за граничною ознакою порівняння здобудемо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+2)n^3}{3(n^4+1)}=\frac{1}{3}$.

Відзначимо, що у всіх трьох прикладах виконується необхідна ознака збіжності ряду.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{arctg\sqrt{n^3-1}}{\sqrt{n^2+n}}$.

Розв’язання. Загальний член ряду $a_n=\frac{arctg\sqrt{n^3-1}}{\sqrt{n^2+n}}>0$. Очевидно, що a_n при $n\to\infty$ є нескінченно малою того ж порядку, що і $\frac{1}{n}$. Дійсно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{arctg\sqrt{n^3-1}}{\sqrt{n^2+n}}\Big/\frac{1}{n}=\frac{\pi}{2}$, тоді за ознакою порівняння випливає розбіжність даного ряду, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ розбігається.

Приклад. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$.

Розв’язання. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[4]{n^5}}$ збігається, бо $p=\frac{5}{4}>1$. Оскільки при будь-якому додатному ε та $n\to\infty$ справедлива нерівність $\ln n<n^{\varepsilon}$, маємо: $\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}<\frac{n^{\varepsilon}}{n^{5/4}}=\frac{1}{n^{5/4-\varepsilon}}$. Виберемо ε з проміжку $0<\varepsilon<\frac{1}{4}$, наприклад $\varepsilon=\frac{1}{5}$, $\frac{5}{4}-\varepsilon>1$, тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln n}{\sqrt[4]{n^5}}$ збігається, тому що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/4-\varepsilon}}$ збігається.

Для порівняння можна, наприклад, вибрати ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{5/4-1/5}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{21}{20}}}$.

Приклад. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)$.

Розв'язання. $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right)=\frac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\frac{2}{n-1}\right)\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{2}{\sqrt{n}(n-1)}$.

Оскільки $\frac{2}{\sqrt{n}(n-1)}\underset{n\to\infty}{=}0^*\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ і ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ збігається, то первинний ряд теж збігається.

11.2.2. Ознака Даламбера

Нехай для знакосталого ряду існує границя частки

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L,$$

тоді: при $L<1$ ряд збігається; при $L>1$ ряд розбігається; при $L=1$ ознака Даламбера непридатна.

На практиці ознаку Даламбера доцільно застосовувати до рядів, члени яких містять факторіали, показникові функції.

Зауваження. Якщо розбіжність ряду доведена за ознакою Даламбера, то $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\neq 0$. Це ж стосується і радикальної ознаки Коші.

Приклади. Дослідити збіжність рядів.

Приклад. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{2^n(n-1)}$.

Розв'язання. Обчислимо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$; $a_n=\frac{n+3}{2^n(n-1)}$, $a_{n+1}=\frac{n+4}{2^{n+1}n}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+4)2^n(n-1)}{2^{n+1}n(n+3)}=\left\|\begin{matrix}(n+4)(n-1)\sim n^2\\ n(n+3)\sim n^2\end{matrix}\right\|=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{n^2}=\frac{1}{2}=L<1.$$

Оскільки $L<1$, то відповідно до ознаки Даламбера ряд збігається.

Приклад. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}$.

Розв'язання. Обчислимо $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$; $a_n=\frac{n^n}{n!}$; $a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}n!}{(n+1)!n^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1,$$

ряд розбігається.

11.2.3. Радикальна ознака Коші

Нехай для ряду $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ з додатними членами існує

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L,$$

тоді: при $L<1$ ряд збігається; при $L>1$ ряд розбігається; при $L=1$ ознака непридатна.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n$.

Розв'язання. Достатня ознака:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{2n^2+1}{3n^2+5}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2+1}{3n^2+5}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+1/n^2}{3+5/n^2}=\frac{2}{3}<1.$$

За радикальною ознакою Коші ряд збігається. Перевірку необхідної ознаки збіжності в даному випадку можна було б і не робити.

Приклад. Довести: $\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(2n)!}=0$.

Розв'язання. Розглянемо ряд із загальним членом $a_n=\frac{n^n}{(2n)!}$. Довівши його збіжність, внаслідок необхідної ознаки збіжності ряду одержимо дану рівність. Дійсно, за ознакою Даламбера ряд збігається, тому що

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^{n+1}}{(2(n+1))!}\frac{(2n)!}{n^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)\left(\frac{n+1}{n}\right)^n(2n)!}{(2n)!(2n+1)(2n+2)}=0<1,$$

$$\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\right).$$

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}$.

Розв'язання. За ознакою Даламбера

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2n+3)}{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n+2)}\cdot\frac{2\cdot5\cdot8\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+3)}{(3n+2)}=\frac{2}{3}<1\Rightarrow$$

ряд збігається.

11.2.4. Інтегральна ознака збіжності Коші

Якщо $f(x)$ є неперервною, монотонно спадною, невід′ємною на проміжку $[1;+\infty)$ функцією, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(n)$ і невласний інтеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)dx$ збігаються або розбігаються одночасно.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^2}$.

Розв’язання. Покладемо $f(x)=\frac{1}{x(\ln x)^2}$. Функція $f(x)$ неперервна при $x \ge 2$, спадає зі зростанням x, $f(x)>0$ $\forall x \in [2;+\infty)$.

Перевіримо існування невласного інтеграла від цієї функції. За визначенням

$$\int\limits_{2}^{+\infty}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{2}^{A}\frac{dx}{x(\ln x)^2}=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{2}^{A}\frac{d(\ln x)}{(\ln x)^2}=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln x}\right)\Bigg|_{2}^{A}=$$

$$=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{\ln A}+\frac{1}{\ln 2}\right)=\frac{1}{\ln 2}.$$

Отже, невласний інтеграл збігається, звідси випливає збіжність ряду.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\,(p>0)$.

Розв’язання. З умови виходить $f(x)=\frac{1}{x^p}>0\,(x\ge 1)$ – монотонно спадна функція. Розглянемо невласний інтеграл $(p \ne 0)$:

$$\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^p}=\lim_{A\to+\infty}\int\limits_{1}^{A}\frac{dx}{x^p}=\lim_{A\to+\infty}\frac{x^{-p+1}}{1-p}\Bigg|_{1}^{A}=\begin{cases}\frac{1}{p-1}, & p>1\\ \infty, & p<1.\end{cases}$$

При $p=1$ маємо $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{A\to+\infty}\int\limits_{1}^{A}\frac{dx}{x}=\lim\limits_{A\to+\infty}\ln x\Big|_{1}^{A}=\infty$.

Отже, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}-\begin{cases}\text{збігається при } p>1\\ \text{розбігається при } p\le 1.\end{cases}$

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{(n+2)\ln^2(2n+3)}$.

Розв’язання. Загальний член ряду $a_n = \dfrac{1}{(n+2)\ln^2(2n+3)} > 0$.

Розглянемо ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(2n+3)\ln^2(2n+3)}$. За інтегральною ознакою збіжності Коші ряд збігається, тому що невласний інтеграл

$$\int_2^{\infty}\frac{dx}{(2x+3)\ln^2(2x+3)} = \frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\int_2^{A}\frac{d\ln(2x+3)}{\ln^2(2x+3)} = \frac{1}{2}\lim_{A\to\infty}\left(\frac{-1}{\ln(2x+3)}\right)\Bigg|_2^A = \frac{1}{2\ln 7}$$

збігається.

Застосовуючи граничну ознаку порівняння, знаходимо:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(2n+3)\ln^2(2n+3)}{(n+2)\ln^2(2n+3)} = 2$. Звідси випливає збіжність досліджуваного ряду.

11.3. Знакозмінні ряди. Абсолютна й умовна збіжність

Знакозмінним називається ряд, членами якого є дійсні числа довільного знака, наприклад,

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}-\frac{1}{7^2}+\ldots+(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Знакозмінний ряд називається *знакопереміжним*, якщо будь-які два його сусідніх члени мають різні знаки, тобто ряд типу

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n = a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n+1}a_n+.., \; a_n>0.$$

Теорема Лейбніця. Якщо елементи $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ знакопереміжного ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ утворюють монотонно спадну послідовність, що наближається до нуля, тобто якщо $a_n > a_{n+1}, \forall n\in N$ і $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то ряд збігається, причому його сума додатна і менша ніж перший член ряду: $0 < S < a_1$.

Висновок. Для знакопереміжного ряду, що задовольняє ознаку збіжності Лейбніця, залишок r_n за абсолютним значенням менше модуля першого свого члена, тобто $|r_n| < a_{n+1}$, де

$$r_n = (-1)^{n+2}a_{n+1} + (-1)^{n+3}a_{n+2} + \ldots$$

Теорема. Якщо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ збігається, то знакозмінний ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ збігається.

Знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ називається *абсолютно збіжним*, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ збігається, та *умовно збіжним*, якщо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ розбігається.

Приклад. Дослідити збіжність ряду. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{n^2+4}$.

Розв'язання. Загальний член ряду $a_n = \frac{n}{n^2+4}$, $a_{n+1} = \frac{n+1}{(n+1)^2+4}$. За ознакою Лейбніця маємо:

1) $\frac{n}{n^2+4} > \frac{n+1}{(n+1)^2+4}$ (перевірити самостійно); 2) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n^2+4} = 0$.

Виходить, ряд збігається.

Складемо ряд з модулів членів даного ряду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+4}$. Необхідна умова збіжності ряду виконується. Порівняємо ряд з розбіжним рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, тоді за ознакою порівняння $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n^2+4}}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2+4} = 1$, тобто ряд з абсолютних значень розбігається. Виходить, первинний ряд збігається умовно.

Приклад. Дослідити збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n}{5^n}$.

Розв'язання. Ряд збігається абсолютно, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ збігається, що можна перевірити, користуючись ознакою Даламбера.

Приклад. Дослідити на абсолютну й умовну збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Розв'язання. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}}$. Оскільки $\lim_{n\to\infty}\sin^2\frac{1}{2\sqrt{n}}=0$, то первинний ряд збігається. Ряд, складений з абсолютних величин, поводиться так само, як ряд із загальним членом $\frac{1}{n}$, оскільки $1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{2n}$. Тому він розбігається. Таким чином, ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ збігається умовно.

Приклад. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n arctg\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{1}{n}$.

Розв'язання. Оскільки $arctg\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{1}{n}\underset{n\to\infty}{\sim}\frac{1}{n^2}$, то $\sum_{n=1}^{\infty}arctg\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{1}{n}$ збігається, звідки випливає абсолютна збіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n arctg\frac{1}{n}\cdot\sin\frac{1}{n}$.

Приклад. Дослідити ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n+1}{7n+3}$.

Розв'язання. Ряд розбігається, тому що не виконується необхідна умова збіжності ряду: $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{7n+3}=\frac{2}{7}\neq 0$.

Приклад. Дослідити ряд $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n\ln(3n)}$

Розв'язання. Досліджуємо на абсолютну збіжність, тобто розглянемо ряд $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\ln(3n)}$; $\frac{1}{n\ln(3n)}\underset{n\to\infty}{=}0^*\left(\frac{1}{3n\ln(3n)}\right)$. За інтегральною ознакою Коші ряд $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{3n\ln(3n)}$ (а отже, і ряд $\sum_{n=4}^{\infty}\frac{1}{n\ln(3n)}$) розбігається, тому що інтеграл $\int_4^{\infty}\frac{dx}{3x\ln(3x)}=\frac{1}{3}\int_4^{\infty}\frac{d(\ln 3x)}{\ln(3x)}=\frac{1}{3}\ln(\ln 3x)\Big|_4^{\infty}=\infty$, тобто розбігається. Абсолютної збіжності немає.

Ряд збігається умовно за теоремою Лейбніца, оскільки:

1) $\dfrac{1}{n\ln(3n)} > \dfrac{1}{(n+1)\ln 3(n+1)}$, 2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n\ln(3n)} = 0$.

11.4. Функціональні ряди

Ряд, членами якого є функції змінної x, називається *функціональним* рядом

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$$

Множина значень змінної x, при яких ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ збігається, називається *областю збіжності* функціонального ряду. В області збіжності ряду його сума є функцією x: $S = S(x)$. Для збіжного функціонального ряду $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$.

Функціональний ряд називається *рівномірно збіжним* на відрізку $[a,b]$, якщо для будь-якого як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує таке $N(\varepsilon)$, що $\forall n > N, \forall x \in [a,b]$ справедливою є нерівність $|r_n(x)| = |S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$.

Теорема Вейєрштрасса (*достатня ознака рівномірної збіжності функціонального ряду*). Якщо члени функціонального ряду $u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ за абсолютним значенням не перевищують відповідних членів збіжного числового ряду з додатними членами $\forall x \in [a,b]$, то функціональний ряд збігається абсолютно і рівномірно на відрізку $[a,b]$.

Інакше кажучи, якщо числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$ збігається, і $|u_n(x)| \le a_n$,

$\forall x \in [a,b]$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ збігається, причому рівномірно, на відрізку $[a,b]$.

Приклад. Знайти область збіжності функціонального ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^2}$.

Розв’язання. Ряд збігається рівномірно для всіх дійсних x, оскільки $\left|\dfrac{\sin nx}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$, а числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ $(p = 2 > 1)$ збігається.

11.4.1. Степеневі ряди

Степеневим рядом називається ряд типу

$$a_0 + a_1(x-a) + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n, \qquad (11.1)$$

$a_i = const,\ a = const$. Зокрема, якщо $a = 0$, то маємо ряд

$$a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \qquad (11.2)$$

Ряд (11.1) приводиться до ряду (11.2) заміною $x - a = y$.

Теорема Абеля. 1) Якщо степеневий ряд (11.2) збігається при деякому значенні $x = x_0 \neq 0$, то він збігається, і, причому абсолютно, при всіх значеннях x, що задовольняють умову $|x| < |x_0|$.

2) Якщо степеневий ряд розбігається при деякому значенні $x = x_1$, то він розбігається і при всіх значеннях x таких, що $|x| > |x_1|$.

Звідси випливає існування інтервалу збіжності степеневого ряду $(-R;R)$. Іншими словами, ряд збігається при $|x| < R$, розбігається при $|x| > R$. У точках $x = \pm R$ потрібне додаткове дослідження для кожного конкретного ряду. Інтервал збіжності може вироджуватися в точку $R = 0$ або співпадати з усією віссю Ox: $R = \infty$. Радіус збіжності степеневого ряду знаходять за формулою $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ або $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}}$.

Основні властивості степеневих рядів.

1. Усередині інтервалу збіжності сума степеневого ряду неперервна.

2. Степеневий ряд можна почленно інтегрувати і диференціювати будь-яке число разів усередині інтервалу збіжності. При цьому радіус збіжності отриманих степеневих рядів не змінюється.

Приклад. Знайти область збіжності ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(x-1)^{2n}}{(n+2)3^n}$.

Розв’язання. Скористаємося ознакою Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(x-1)^{2(n+1)}(n+2)3^n}{(n+3)3^{n+1}(x-1)^{2n}}\right| = \frac{(x-1)^2}{3}.$$

При $\dfrac{(x-1)^2}{3} < 1$ ряд збігається, тобто при $-\sqrt{3}+1 < x < 1+\sqrt{3}$ ряд збігається.

Перевіримо збіжність ряду на кінцях інтервалу збіжності. При $x = \pm\sqrt{3}+1$ маємо ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(\pm\sqrt{3})^{2n}}{(n+2)3^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n+2}$. Розбіжність ряду перевіряється порівнянням з гармонічним рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$. Таким чином, інтервал збіжності: $x \in (-\sqrt{3}+1;1+\sqrt{3})$.

Приклад. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)^n}{n!}$.

Розв'язання. Для цього ряду $a_n=\frac{n^n}{n!}$, $a_{n+1}=\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}$.

Радіус збіжності ряду

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{n!}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e},$$

при $|x|<\frac{1}{e}$ ряд збігається. Досліджуємо збіжність ряду в точках $x=\pm\frac{1}{e}$.

При $x=-\frac{1}{e}$ одержимо числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n(-1)^n}{n!e^n}$.

При великих n за формулою Стірлінга $n!\approx\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}$. Розглянемо ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n(-1)^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}e^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi n}}$. За теоремою Лейбніца цей ряд збігається. Оскільки збіжність ряду визначається поведінкою його загального члена при достатньо великих n, звідси випливає, що при $x=-\frac{1}{e}$ досліджуваний ряд збігається.

При $x=\frac{1}{e}$ числовий ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n(-1)^n}{n!e^n}$ розбігається, оскільки ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{\left(\frac{n}{e}\right)^n\sqrt{2\pi n}e^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$ розбігається: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\underset{n\to\infty}{=}0^*\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$, $p=\frac{1}{2}<1$.

Отже, область збіжності: $\left[-\frac{1}{e};\frac{1}{e}\right)$.

Приклад. Знайти область збіжності ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{5^n(x+3)^n}$.

Розв'язання. Покладемо $y=\dfrac{1}{x+3}$, одержимо степеневий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n^2+1)y^n}{5^n}$. Його радіус збіжності $R=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n^2+1)}{5^n}\dfrac{5^{n+1}}{(n+1)^2+1}=5$. Звідси випливає збіжність первинного ряду при $|x+3|>\dfrac{1}{5}$. При $x+3=\dfrac{1}{5}$ маємо розбіжний числовий ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+1}{5^n\dfrac{1}{5^n}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n^2+1)$, оскільки $\lim\limits_{n\to\infty}(n^2+1)\neq 0$; при $x+3=-\dfrac{1}{5}$ ряд також розбігається. Область збіжності ряду $\in:\left(-\infty;-\dfrac{16}{5}\right)\cup\left(-\dfrac{14}{5};+\infty\right)$.

11.4.2. Ряд Тейлора. Застосування рядів у наближених обчисленнях

Ряд Тейлора має вигляд

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+\ldots$$

Зокрема, при $a=0$ маємо *ряд Маклорена*:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots$$

Запишемо розкладання основних елементарних функцій у ряд Маклорена:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\ x\in R;$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\ldots,\ x\in R;$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots,\ x\in R;$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ldots+\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}+\ldots,\ x\in(-1;1];$$

$$\ln\frac{1+x}{1-x}=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots\right),\quad |x|<1;$$

$$\operatorname{arctg}x=x-\frac{x^3}{3}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)}+\ldots,\ x\in[-1;1];$$

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!}x^n+\ldots,\ |x|<1.$$

Обчислення інтегралів за допомогою степеневих рядів.

Для обчислення $\int\limits_a^b f(x)dx$, межі інтегрування якого лежать усередині інтервалу збіжності ряду функції $f(x)$, розкладаємо функцію $f(x)$ в степеневий ряд і почленно інтегруємо його.

Приклад. Обчислити інтеграл $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4}$.

Розв'язання. Розклавши функцію, що інтегрується, в степеневий ряд:

$$\frac{1}{1+x^4} = 1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \ldots,$$

одержимо: $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4} = \int\limits_0^{0,5} \left(1 - x^4 + x^8 - x^{12} + \ldots\right)dx = \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^5 \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{2}\right)^9 \frac{1}{9} - \ldots$

Отриманий ряд є знакопереміжним. Якщо обмежитися двома першими членами ряду (при цьому абсолютна похибка менше a_3: $\left(\frac{1}{2}\right)^9 \frac{1}{9} \approx 0,0002$), то

$$\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^4} \approx 0,4938.$$

Застосування рядів до розкриття невизначеностей при обчисленні границь.

Приклад. Знайти границю: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2(e^x - 1)}$.

Розв'язання.

$$\lim\limits_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^2(e^x - 1)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + \ldots\right)}{x^2\left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots\right)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{-\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{60} + \ldots}{x^3\left(1 + \frac{x}{2} + \ldots\right)} = -\frac{1}{3}$$

Наближене обчислення значень функцій.

Приклад. Знайти наближене значення $\cos 10^\circ$ з точністю до 10^{-4}.

Розв'язання. Переводячи градусну міру в радіанну, одержимо:

$10^\circ \approx 0,1745$ радіан $\left(10^\circ = \frac{\pi}{18} \text{ радіан}\right)$.

Розкладаючи у степеневий ряд, одержимо: $\cos 10^\circ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^{2n}$. Цей ряд є знакопереміжним, тому, приймаючи за наближене значення $\cos 10^\circ$ суму перших двох членів розкладання, зробимо помилку, що дорівнює залишку r_2 та за абсолютним значенням є меншою третього члена:

$$|r_2| < \frac{1}{24}\left(\frac{\pi}{18}\right)^4 < \frac{(0{,}2)^4}{24} < 0{,}0001.$$

Виходить: $\cos 10^\circ \approx 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{18}\right)^2 \approx 1 - \frac{1}{2}(0{,}1745)^2 \approx 0{,}9948$.

Приклад. Обчислити $\sqrt[3]{130}$ з точністю до 0,0001.

Розв'язання. Використовуємо біноміальний ряд: $(1+x)^m$, тоді

$$\sqrt[3]{130} = \left(5^3 + 5\right)^{1/3} = 5\left(1 + \frac{1}{5^2}\right)^{1/3} = 5 + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1/3(-2/3)}{2!5^3} + \frac{1/3(-2/3)(1/3-2)}{3!5^5} + \ldots$$

Отриманий ряд є знакопереміжним, починаючи з другого члена і, виходить, похибка за теоремою Лейбніця від відкидання членів, починаючи з четвертого, за абсолютним значенням менша ніж $\frac{1}{3^4 \cdot 5^4} < 0{,}0001$.

Тому, зберігаючи тільки три члени розкладання, маємо:

$\sqrt[3]{130} \approx 5 + 0{,}0667 - 0{,}0009 = 5{,}0658$.

Приклад. Обчислити $\ln 3$ з точністю до $0{,}01$.

Розв'язання. Використаємо розкладання

$$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right), \quad |x| < 1.$$

Знайдемо значення x з рівності $\frac{1+x}{1-x} = 3 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$, що дає

$$\ln 3 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3 3} + \frac{1}{2^5 5} + \ldots + \frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)} + \ldots\right).$$

У цьому випадку ряд не є знакопереміжним, тому залишок ряду потрібно оцінити:

$$r_n = 2\left(\frac{1}{2^{2n+1}(2n+1)} + \frac{1}{2^{2n+3}(2n+3)} + \ldots\right) <$$

$$< \frac{2}{2^{2n+1}}\left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2^2(2n+1)} + \frac{1}{2^4(2n+1)} + \ldots\right) =$$

$$=\frac{2}{2^{2n+1}(2n+1)}\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^4}+\ldots\right)=\frac{2}{2^{2n+1}(2n+1)}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{2}{3\cdot 2^{2n-1}(2n+1)}.$$

Підберемо n таке, щоб залишок ряду $r_n < 0{,}01$. При $n=2$ маємо:

$$r_2=\frac{2}{3\cdot 2^3\cdot 5}=\frac{1}{60}>0{,}01.$$

При $n=3$: $r_3=\dfrac{2}{3\cdot 2^5\cdot 7}=\dfrac{1}{16\cdot 21}<0{,}01.$

Виходить, достатньо обмежитися значенням $n=3$, що дає

$$\ln 3\approx 2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3\cdot 3}+\frac{1}{2^5\cdot 5}\right)=1+\frac{1}{4\cdot 3}+\frac{1}{2^4\cdot 5}=1+0{,}08333+0{,}0125\approx 1{,}096.$$

Розв'язання диференціальних рівнянь.

Для наближеного розв'язання диференційного рівняння за допомогою степеневих рядів застосовують два способи: порівняння коефіцієнтів і послідовного диференціювання.

Спосіб порівняння коефіцієнтів полягає в наступному: розв′язок рівняння записують у вигляді степеневого ряду з невизначеними коефіцієнтами:

$$y=A_0+A_1(x-a)+\ldots+A_n(x-a)^n+\ldots$$

Потім з початкових умов визначають значення коефіцієнтів $A_0, A_1, \ldots, A_n, \ldots$ Отриманий розв′язок підставляють у рівняння. Порівнюючи коефіцієнти при однакових степенях $x-a$, знаходять інші коефіцієнти ряду.

Приклад. Знайти розв′язок диференціального рівняння $y''-xy=0$ при початкових умовах $y(0)=1,\ y'(0)=0$.

Розв'язання. Запишемо розв′язок рівняння у вигляді

$$y=A_0+A_1x+\ldots+A_2x^2+\ldots+A_nx^n+\ldots$$

З початкових умов визначимо A_0 та A_1: $y(0)=1=A_0, \qquad y'(0)=0=A_1$.

Розв′язок $y=1+A_2x^2+A_3x^3+\ldots$ підставляємо в рівняння:

$$2A_2+2\cdot 3A_3x+3\cdot 4A_4x^2+\ldots-\left(x+A_2x^3+A_3x^4+\ldots\right)=0,$$

звідки, порівнюючи коефіцієнти, одержимо:

$2A_2=0,\ A_2=0;$

$$2\cdot 3A_3=1,\ A_3=\frac{1}{2\cdot 3};\quad 3\cdot 4A_4=0,\ A_4=0;$$

$$4\cdot 5A_5=A_2,\ A_5=0;\quad 5\cdot 6A_6=A_3,\ A_6=\frac{1}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}.$$

Таким чином, $\quad y=1+\dfrac{x^3}{2\cdot 3}+\dfrac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\ldots$

Знайдемо розв′язок рівняння методом послідовного диференціювання. Запишемо розв′язок рівняння у вигляді

$$y = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + ...$$

За умовою $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$. Після підстановки в рівняння $x = 0$ знаходимо: $y''(0) = 0$.

Послідовно диференціюючи початкове рівняння, одержимо:

$y''' = y + xy'$, $y'''(0) = 1$; $y^{(4)} = 2y' + xy''$, $y^{(4)}(0) = 0$;

$y^{(5)} = 3y'' + xy'''$, $y^{(5)}(0) = 0$; $y^{(6)} = 4y''' + xy^{(4)}$, $y^{(6)}(0) = 4$,

що після підстановки збігається з результатом методу невизначених коефіцієнтів.

11.5. Ряди Фур'є

11.5.1. Розкладання періодичних функцій у ряд Фур'є

Нехай $f(x)$ – дійсна функція дійсного аргумента *x*. Припустимо, що ця функція є періодичною з періодом *T*, тобто таким, що для усіх *x* справедлива рівність

$f(x+T) = f(x)$.

Звідси виходить, що для вивчення функції $f(x)$ достатньо розглянути її на будь-якому інтервалі довжини *T*. За такий інтервал можна прийняти один із двох інтервалів $[0, T]$ або $[-T/2, T/2]$. З геометричного змісту визначеного інтеграла випливає, що для будь-якої періодичної функції $f(x)$ з періодом *T*

$$\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(x)dx = \int_{\beta}^{\beta+T} f(x)dx, \qquad (11.3)$$

тобто інтеграли від $f(x)$ за будь-якими двома проміжками завдовжки *T* є однаковими для будь-яких значень α і β (рис. 11.1). (Перевірити дане твердження можна аналітично).

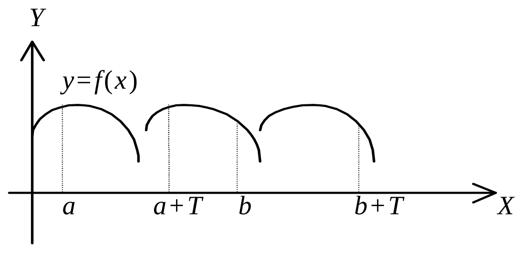

Рис. 11.1

Якщо функція $f(x)$ має період *T*, то $\varphi(x) = f(ax)$ має період T/a. Справді, $\varphi(x + T/a) = f(a(x + T/a)) = f(ax + T) = f(ax) = \varphi(x)$.

Наприклад, функції $y = \cos n\omega x$ або $y = \sin n\omega x$ є періодичними з періодом $T = \frac{2\pi}{n\omega}$. Загальний період системи тригонометричних функцій

$$1, \cos\frac{\pi}{l}x, \sin\frac{\pi}{l}x, \cos\frac{2\pi}{l}x, \sin\frac{2\pi}{l}x, \ldots, \cos\frac{n\pi}{l}x, \sin\frac{n\pi}{l}x, \ldots \qquad (11.4)$$

дорівнює $2l$ ($T = 2l$).

Періодичність суми тригонометричного ряду. Складемо тригонометричний ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi x}{l} + b_k \sin\frac{k\pi x}{l}\right).$$

де коефіцієнти a_k, b_k:

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots); \;\; b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \quad (k = 1, 2, \ldots). \qquad (11.5)$$

Теорема Діріхле (*достатня ознака розкладності функції в ряд Фур'є*). Якщо функція $f(x)$ має період 2 і на відрізку $[-l, l]$ неперервна або має скінченне число точок розриву 1-го роду і відрізок $[-l, l]$ можна розбити на скінченне число відрізків так, що усередині кожного з них $f(x)$ є монотонною, то ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається $\forall x$, причому в точках неперервності функції $f(x)$ сума ряду дорівнює $f(x)$, а у точках розриву функції $f(x)$ його сума дорівнює $\dfrac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$, тобто середньому арифметичному граничних значень ліворуч і праворуч.

Крім того, ряд Фур'є функції $f(x)$ збігається рівномірно на будь-якому відрізку, що разом із своїми кінцями належить інтервалу неперервності функції $f(x)$.

11.5.2. Ряди Фур'є для парних і непарних періодичних функцій

1) Нехай функція $f(x)$ є парною на відрізку $[-l, l]$, тоді $f(x)\cdot\cos\dfrac{k\pi x}{l}$ теж є парною; графік її симетричний щодо осі ординат, і тоді

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx \;(k = 0, 1, 2, \ldots).$$

Функція ж $f(x)\cdot\sin\dfrac{k\pi x}{l}$ буде непарною і

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx = 0.$$

Звідси випливає, що парна функція розкладається в ряд Фур'є, складений з одних косинусів, при цьому

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos\frac{k\pi x}{l} \text{ на } (-l, l), \;\; f(x) - \text{парна}, \qquad (11.6)$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx \ (k = 0,1,2,\ldots).$$

2) Аналогічно, якщо функція $f(x)$ є непарною, то вона розкладається в ряд по синусах:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \text{ на } (-l,l), \ f(x) \text{ – непарна,} \qquad (11.7)$$

$$b_k = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx \ (k = 1,2,\ldots).$$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є періодичну $(T = 2\pi)$ функцію, задану на проміжку $(-\pi,\pi)$, як $f(x) = x$.

Розв’язання. Оскільки дана функція усередині відрізка є неперервною і монотонною, вона задовольняє умовам теореми Діріхле. Крім того, внаслідок непарності коефіцієнти $a_k = 0$ $(k = 0,1,2,...)$. Складемо тригонометричний ряд Фур'є, для чого обчислимо b_k, вважаючи $l = \pi$:

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin kx dx = \left| \begin{array}{l} u = x du = dx \\ dv = \sin kx dx \\ v = -\dfrac{\cos kx}{k} \end{array} \right| = \frac{2}{\pi}\left(x\left(-\frac{\cos kx}{k}\right)\Bigg|_0^{\pi} + \frac{1}{k}\int_0^{\pi}\cos kx dx\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{k}\cos k\pi + \frac{1}{k^2}\sin kx\Bigg|_0^{\pi}\right) = \frac{2}{k}(-1)^{k+1},$$

оскільки $\cos k\pi = (-1)^k$, $\sin k\pi = 0$.

Отже, на інтервалі $(-\pi,\pi)$

$$x \underset{(-\pi;\pi)}{=} 2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots + \frac{(-1)^{k+1}\sin kx}{k} + \ldots\right). \qquad (11.8)$$

Ця рівність правильна лише при $-\pi < x < \pi$.

У точках сума ряду за теоремою Діріхле дорівнює , тобто $S(\pi) = S(-\pi) = S(\pm 3\pi) = S(\pm 5\pi) = \ldots = 0$.

У силу -періодичності суми S(x) ряду (11.5.9) графік цієї суми має вигляд, зображений на рис. 11.5.2.

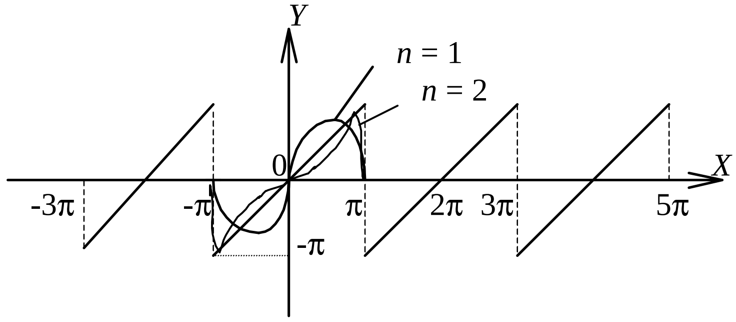

Рис. 11.2

Обмежившись одним членом ряду (11.11), тобто при $n=1$, одержимо $x \underset{(-\pi;\pi)}{\approx} 2\sin x = S_1(x)$; при $n=2$ знаходимо: $x \underset{(-\pi;\pi)}{\approx} 2\sin x - \sin 2x = S_2(x)$, що зображено на рис. 11.2.

Зауважимо, що сума $S(x)$ є розривною функцією, хоча всі члени ряду неперервні (у точках розриву $S(x)$ порушена рівномірна збіжність ряду).

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію $y=|\cos x|$. Користуючись цим розкладанням, обчислити суми рядів $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^k}{4k^2-1}$ і $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{4k^2-1}$.

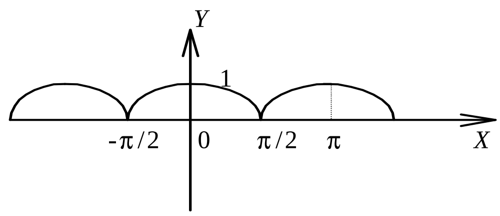

Рис. 11.3

Розв’язання. Функція – парна, має період $T=\pi$, тоді $l=\dfrac{\pi}{2}$. Функція неперервна на відрізку $\left[-\pi/2;\pi/2\right]$ і задовольняє умови теореми Діріхле. Коефіцієнти $b_k=0\ (k=1,2,\ldots)$,

$$a_k=\frac{2}{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\cdot\cos\frac{k\pi x}{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2}\cos x\cdot\cos 2kx dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\int\limits_0^{\pi/2}\cos(2k-1)xdx+\int\limits_0^{\pi/2}\cos(2k+1)xdx\right)=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{2k-1}+\frac{\sin(2k+1)\frac{\pi}{2}}{2k+1}\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{-\sin(\pi/2-k\pi)}{2k-1}+\frac{\sin(\pi/2+k\pi)}{2k+1}\right)=\frac{2}{\pi}(-1)^k\,\frac{-2}{4k^2-1}=\frac{4}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1},$$

$(k=1,2,\ldots)$.

Знайдемо: $a_0 = \frac{4}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} \cos x dx = \frac{4}{\pi}$, виходить:

$$\left|\cos x\right| \underset{\left[-\pi/2;\pi/2\right]}{=} \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\cos 2kx.$$

Вважаючи $x = \frac{\pi}{2}$, знайдемо: $0 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}(-1)^k}{4k^2-1}$; звідси маємо:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}.$$

При $x = 0$ одержимо: $1 = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1}$, звідки: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{4k^2-1} = \frac{\pi-2}{4}$.

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є періодичну ($T = 2\pi$) функцію, задану на відрізку $[-\pi, \pi]$ як

$$f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -\pi \le x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{\pi} & \text{при } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

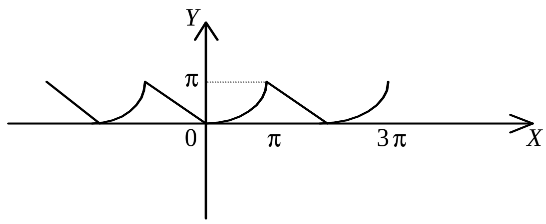

Рис. 11.4

Розв’язання. Обчислимо коефіцієнти Фур'є:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{0}(-x)dx + \frac{1}{\pi^2}\int\limits_0^{\pi} x^2 dx = \frac{5}{6}\pi,$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx dx = \frac{1}{\pi}\left(-\int\limits_{-\pi}^{0} x\cos kx dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x^2 \cos kx dx\right).$$

Маємо: $\int\limits_{-\pi}^{0} x\cos kx dx = \left| \begin{matrix} u = x du = dx \\ dv = \cos kx dx \\ v = \frac{1}{k}\sin kx \end{matrix} \right| = \frac{x}{k}\sin kx \Big|_{-\pi}^{0} - \frac{1}{k}\int\limits_{-\pi}^{0}\sin kx dx =$

$$= \frac{1}{k^2}\cos kx \Big|_{-\pi}^{0} = \frac{-(-1)^k + 1}{k^2};$$

$$\int\limits_{0}^{\pi} x^2 \cos kx dx = \left| \begin{matrix} u = x^2 du = 2x dx \\ dv = \cos kx dx \\ v = \frac{1}{k}\sin kx \end{matrix} \right| = \frac{x^2}{k}\sin kx \Big|_{0}^{\pi} - \frac{2}{k}\int\limits_{0}^{\pi} x\sin kx dx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = x du = dx \\ dv = \sin kx dx \\ v = -\frac{\cos kx}{k} \end{matrix} \right| = -\frac{2}{k}\left(-x\frac{\cos kx}{k}\Big|_{0}^{\pi} + \frac{1}{k}\int\limits_{0}^{\pi}\cos kx dx \right) =$$

$$= -\frac{2}{k}\left(\frac{-(-1)^k \pi}{k} + \frac{1}{k^2}\sin kx \Big|_{0}^{\pi} \right) = \frac{2\pi}{k^2}(-1)^k.$$

Виходить: $a_k = \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^k - 1}{k^2} + \frac{2}{k^2}(-1)^k \right) = \frac{3(-1)^k - 1}{\pi k^2}.$

Аналогічно:

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx dx = \frac{1}{\pi}\left(-\int\limits_{-\pi}^{0} x\sin kx dx + \frac{1}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi} x^2 \sin kx dx \right) = \frac{2\left((-1)^k - 1\right)}{\pi^2 k^3},$$

тобто $b_k = \begin{cases} 0, & \text{якщо } k \text{ парне} \\ -\dfrac{4}{\pi^2 k^3}, & \text{якщо } k \text{ непарне.} \end{cases}$

Отже, розкладання функції в ряд Фур'є має вигляд

$$f(x) = \frac{5}{12}\pi + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3(-1)^k - 1}{\pi k^2}\cos kx - \frac{4}{\pi^2 (2k-1)^2}\sin(2k-1)x \right).$$

11.5.3. Періодичне продовження і розкладання в ряд Фур'є неперіодичної функції

Нехай неперіодична функція $f(x)$, графік якої наведено на рис. 11.5 суцільною лінією, цікавить нас лише на інтервалі (a, b).

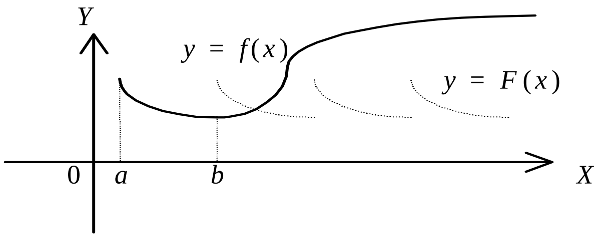

Рис. 11.5

Побудуємо періодичну функцію $F(x)$ із періодом $T \geq b-a$, що збігається з $f(x)$ на відрізку $[a,b]$. Геометрично для цього потрібно виконати перенесення графіка функції $f(x)$ паралельно осі OX праворуч і ліворуч на відстані $T, 2T, ..., nT, ...$ (рис. 11.5). Цей процес називається періодичним продовженням функції $f(x)$ за межі відрізка $a \leq x \leq a+T=b$ з періодом $T=b-a$, $l=\dfrac{b-a}{2}$.

Якщо $f(x)$ задовольняє умови теореми Діріхле, то і $F(x)$ їх теж задовольняє і, отже, може бути подана у вигляді ряду Фур'є. Через збіг $f(x)$ та $F(x)$ на $[a,b]$ отриманий ряд і буде рядом Фур'є неперіодичної функції $f(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

У точках неперервності функції $F(x)$ маємо:

$$a_k = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} F(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} f(x)\cos\frac{k\pi x}{l}dx,$$

$$b_k = \frac{1}{l}\int_{a}^{b} f(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx(k=1,2,\ldots), l=\frac{b-a}{2},$$

$$f(x) \underset{(a,b)}{=} \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l}.$$

При цьому, якщо $f(a)=f(b)$, на кінцях інтервалу (a,b) періодично продовжена функція $F(x)$ розривів не має (рис. 11.6).

У точках розриву $f(x)$ усередині інтервалу (a,b) і на кінцях інтервалу (якщо $f(a)\neq f(b)$) сума ряду дорівнює півсумі односторонніх границь функції $f(x)$, тобто

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l} = \frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}; \text{ при } x\in(a,b);$$

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k\cos\frac{k\pi x}{l} + b_k\sin\frac{k\pi x}{l} = \frac{f(a+0)+f(b-0)}{2}; \text{ при } x=a; x=b,$$

$\left(l = \dfrac{b-a}{2} \right).$

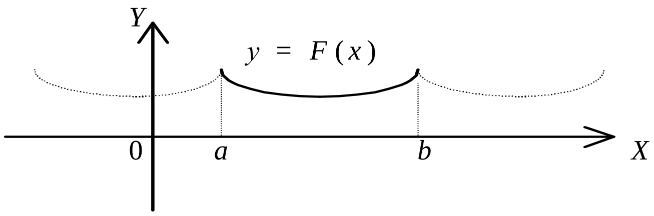

Рис. 11.6

Якщо $f(a) \neq f(b)$, на кінцях інтервалу (a,b) маємо розриви 1-го роду; оскільки функція $F(x)$ – періодична, за її значення в точках розриву a і b можна взяти однакові значення, які дорівнюють середньому арифметичному граничних значень $\frac{1}{2}\left(f(a+0)+f(b-0)\right)$, що збігається з сумою ряду Фур'є (рис. 11.7).

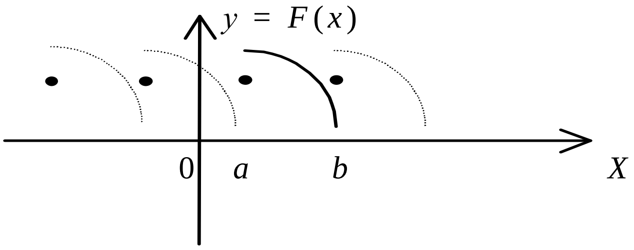

Рис. 11.7

Вважаючи також у точках розриву $f(x)$ значення функції рівним середньому арифметичному граничних значень $\frac{1}{2}\left(f(x+0)+f(x-0)\right)$, одержуємо, що періодична функція $F(x)$ – це сума ряду Фур'є, що збігається з $f(x)$ на $[a,b]$. Графік суми ряду Фур'є є сукупністю кривих та ізольованих точок.

Приклад. Зобразити $f(x) = x^2$ рядом Фур'є в (1; 3) (рис. 11.8).

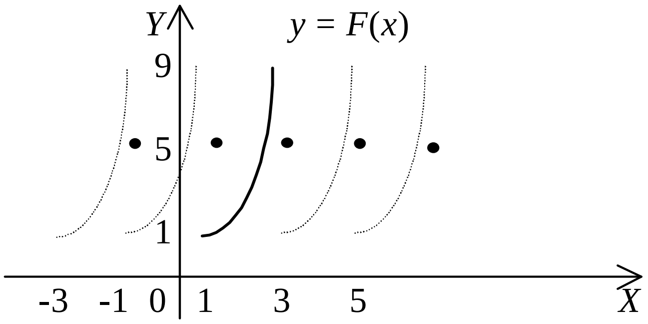

Рис. 11.8

Розв’язання. Період $T = 2l = 3 - 1 = 2,\ l = 1;$ у точках розриву $x = 2k + 1, (k = 0, 1, 2, ...)$ сума тригонометричного ряду дорівнює $\frac{1}{2}(1^2 + 3^2) = 5$, що можна прийняти і як значення функції $F(x)$.

Знаходимо: $a_k = \int\limits_1^3 f(x)\cos k\pi x dx =$

$$= \int\limits_1^3 x^2 \cos k\pi x dx = \left| \begin{matrix} u = x^2\ du = 2xdx \\ dv = \cos k\pi x dx \\ v = \frac{1}{k\pi}\sin k\pi x \end{matrix} \right| = \frac{x^2 \sin k\pi x}{k\pi}\Bigg|_1^3 - \int\limits_1^3 \frac{\sin k\pi x}{k\pi} 2xdx =$$

$$= \left| \begin{matrix} u = xdu = dx \\ dv = \sin k\pi x dx \\ v = -\frac{\cos k\pi x}{k\pi} \end{matrix} \right| = \frac{2x\cos k\pi x}{(k\pi)^2}\Bigg|_1^3 + \frac{2}{(k\pi)^2}\int\limits_1^3 \cos k\pi x dx = \frac{2}{(k\pi)^2}(3\cos k\pi \cdot 3 -$$

$-\cos k\pi) = \frac{4(-1)^k}{k^2\pi^2}$, де $\sin 3k\pi = \sin k\pi = 0; \cos k\pi = \cos 3k\pi = (-1)^k$,

$\int\limits_1^3 \cos k\pi x dx = 0;\ a_0 = \int\limits_1^3 x^2 dx = \frac{26}{3}.$

Аналогічно обчислюються коефіцієнти b_k:

$$b_k = \int\limits_1^3 f(x)\sin k\pi x dx = 8\frac{(-1)^k}{k\pi}.$$

Одержимо розкладання в ряд Фур'є:

$$x^2 \underset{(1;3)}{=} \frac{13}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{\cos k\pi x}{k^2\pi^2} - 2\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\right).$$

Скориставшись значенням суми $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$, одержимо, наприклад, при $x = 1$ суму ряду Фур'є, яка дорівнює 5:

$$S(1) = \frac{13}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos k\pi}{k^2\pi^2} = \frac{13}{3} + \frac{4}{\pi^2}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \frac{13}{3} + \frac{2}{3} = 5,$$

що збігається з середнім арифметичним односторонніх границь: $\frac{1}{2}\left(x^2\Big|_{x=1} + x^2\Big|_{x=3}\right) = \frac{1}{2}(1+9) = 5.$

11.5.4. Розкладання в ряд Фур'є функцій, заданих на відрізку $[0,l]$

При практичному використанні рядів Фур'є як проміжок, на якому нас цікавить поводження функції, зручно взяти $[0,l]$, тобто $a = 0,\ \ b = l$.

Теорема. Функцію $f(x)$, що задана і диференцюється на $(0,l)$, можна нескінченною множиною способів розкласти в тригонометричний ряд.

Можливість вибору продовження функції дозволяє, наприклад, побудувати ряд, у якому амплітуди гармонік спадають швидше, або ряд, коефіцієнти якого обчислюються простіше.

Приклад. Розкласти за косинусами функцію $f(x) = 2x$, задану на [0,3] (рис. 11.9).

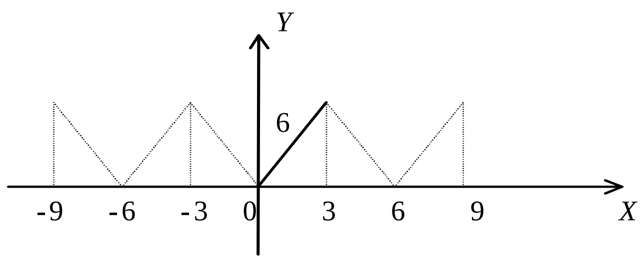

Рис. 11.9

Розв’язання. На проміжок [-3,0] функція продовжується парно, виходить, $b_k = 0\ (k = 1,2,...)$, $l = 3$, період $T = 6$. Маємо:

$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 2x\,dx = \frac{2}{3}x^2\Big|_0^3 = 6;\ \frac{a_0}{2} = 3;$$

$$a_k = \frac{2}{3}\int_0^3 2x\cos\frac{k\pi x}{3}dx = \frac{3\cdot 4}{k\pi\cdot 3}\int_0^3 x\,d(\sin\frac{k\pi x}{3}) =$$

$$=\frac{4}{k\pi}\left(x\sin\frac{k\pi x}{3}\Big|_0^3-\int_0^3\sin\frac{k\pi x}{3}dx\right)=\frac{4}{k\pi}\frac{3}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{3}\Big|_0^3=\frac{12}{k^2\pi^2}(\cos k\pi-1)=$$

$$=\frac{12}{k^2\pi^2}\left((-1)^k-1\right);$$

$$2x\underset{[0;3]}{=}3+\frac{12}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\left((-1)^k-1\right)\frac{1}{k^2}\cos\frac{k\pi x}{3}=3+\frac{12}{\pi^2}(-2\cos\frac{\pi x}{3}-\frac{2}{3^2}\cos\frac{3\pi x}{3}-$$

$$-\frac{2}{5^2}\cos\frac{5\pi x}{3}-\ldots-\frac{2}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi x}{3}-\ldots)=3-\frac{24}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)\pi x/3}{(2k+1)^2}.$$

Приклад. Розкласти в ряд Фур'є функцію $f(x)=\begin{cases}1, x\in[0;1]\\ 2-x, x\in[1;2]\end{cases}$ (рис. 11.10).

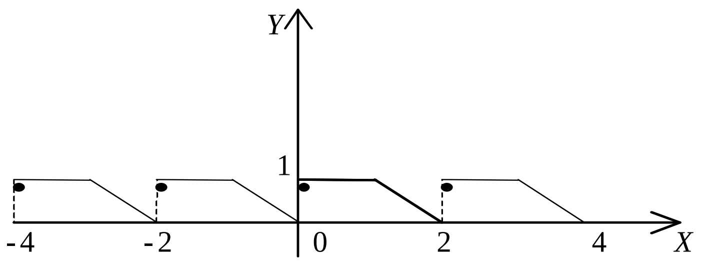

Рис. 11.10

Розв’язання. Маємо: $l=1,\ T=2l=2$.

$$a_0=\int_0^1 dx+\int_1^2(2-x)dx=x\Big|_0^1+\left(2x-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2=1+4-2-2+\frac{1}{2}=\frac{3}{2};$$

$$a_k=\int_0^1\cos k\pi x dx-\int_1^2(x-2)\cos k\pi x dx=\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\Big|_0^1-\frac{1}{k\pi}\int_1^2(x-2)d(\sin k\pi x)=$$

$$=-\frac{1}{k\pi}\left((x-2)\sin k\pi x\Big|_1^2-\int_1^2\sin k\pi x dx\right)=\frac{-1}{(k\pi)^2}(1-\cos k\pi)=\frac{\left((-1)^k-1\right)}{k^2\pi^2};$$

$$b_k=\int_0^1\sin k\pi x dx-\int_1^2(x-2)\sin k\pi x dx=\frac{-1}{k\pi}\int_0^1 d(\cos k\pi x)+$$

$$+\frac{1}{k\pi}\int_1^2(x-2)d(\cos k\pi x)=\frac{-1}{k\pi}\cos k\pi x\Big|_0^1+\frac{1}{k\pi}\left((x-2)\cos k\pi x\Big|_1^2-\int_1^2\cos k\pi x dx\right)$$

$$= \frac{-1}{k\pi}(\cos k\pi - 1) + \frac{1}{k\pi}(\cos k\pi) = \frac{1}{k\pi}, \quad \text{де} \int_1^2 \cos k\pi x dx = 0.$$

Отже, $$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4} + \dfrac{1}{\pi^2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{((-1)^k - 1)\cos k\pi x}{k^2} + \dfrac{1}{\pi}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin k\pi x}{k}, \ x \in (0;2). \\ \dfrac{1}{2}, \quad x = 0; \ x = 2. \end{cases}$$

Розділ 12

КРАТНІ ІНТЕГРАЛИ

12.1. Подвійні інтеграли і їх обчислення у декартовій системі координат

Нехай у замкнутій обмеженій області D задана обмежена функція $f(x,y)$. *Подвійним інтегралом* від функції $f(x,y)$ по області D називається

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k,\eta_k)\Delta\sigma_k=\iint_D f(x,y)dxdy=\iint_D f(x,y)d\sigma .$$

Подвійний інтеграл обчислюється зведенням його до повторного.

12.1.1. Правила знаходження меж інтегрування в повторному інтегралі:

1. Область інтегрування D проектується, наприклад, на відрізок $[a, b]$ осі OX: $a\le x\le b$. Числа a й b будуть, відповідно, нижньою й верхньою межами інтегрування в зовнішньому інтегралі.

2. Щоб знайти межі інтегрування у внутрішньому інтегралі, відзначимо на контурі L, що обмежує область D , точки A і B з абсцисами a і b. Ці дві точки розділяють контур L на нижню й верхню частини, рівняння яких потрібно розв'язати відносно y. Нехай ці частини визначаються, відповідно, рівняннями $y=y_1(x)$ і $y=y_2(x)$, причому на відрізку $[a, b]$ функції $y_1(x)$ і $y_2(x)$ неперервні, однозначні й зберігають аналітичний вираз. Візьмемо на відрізку $[a, b]$ осі OX будь-яку точку x, проведемо через неї пряму паралельну осі oy, що перетне контур L у точці M_1 (точка входу в область D) і в точці M_2(точка виходу з області D) $y_1(x)\le y\le y_2(x)$.

Зауваження. При проектуванні області D на вісь OY змінна y змінюється в межах від c до d. Точки E і C розбивають контур на дві частини: праву і ліву, рівняння яких мають вигляд: $x=x_2(y)$ і $x=x_1(y)$ відповідно, при цьому $x_1(y)\le x\le x_2(y)$.

Тоді, $$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b dx\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy, \qquad (12.1.\ 1)$$

або $$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_c^d dy\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)dx. \qquad (12.1.2)$$

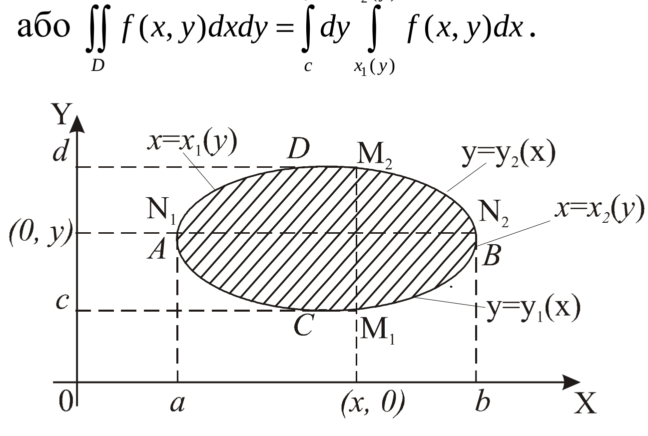

Рис. 12.1

У внутрішньому інтегралі межі інтегрування в загальному випадку є функції тієї змінної, по якій обчислюється зовнішній інтеграл і яка при обчисленні внутрішнього інтеграла залишається постійною.

При цьому для зменшення об'єму обчислювальної роботи варто вибирати, якщо це можливо, такий порядок інтегрування, при якому не доводиться розбивати область інтегрування на частини.

Приклад 1. Привести до повторного (двома способами) подвійний інтеграл $\iint\limits_D f(x,y)dxdy$, якщо область D обмежена прямими: $y=0$, $y=x$, $x=a$.

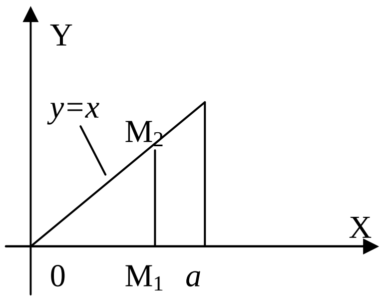

Рис. 12.2

Розв’язання.

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_0^a dx \int\limits_0^x f(x,y)dy = \int\limits_0^a dy \int\limits_y^a f(x,y)dx$$

Приклад 2. Обчислити інтеграл $I = \iint\limits_d (3x^2y + 4xy^3)dxdy$, де D: $1 \le x \le 2$, $3 \le y \le 4$.

Розв’язання.

За формулою (12.1.3) маємо:

$$\int\limits_1^2 dx \int\limits_3^4 (3x^2y + 4xy^3)dy = \int\limits_1^2 (3x^2\frac{y^2}{2} + xy^4)\Bigg|_{y=3}^{y=4} dx = \int\limits_1^2 \left((24x^2 + 256x) - (\frac{27}{2}x^2 + 81x)\right)dx =$$

$$\int\limits_1^2 \left(\frac{21}{2}x^2 + 175x\right)dx = 287 .$$

Скористаємося тепер формулою (12.1. 4), тобто інтегруємо спочатку по x, а потім по y. Одержимо:

$$\int\limits_3^4 dy \int\limits_1^2 (3x^2y + 4xy^3)dx = \int\limits_3^4 (x^3y + 2x^2y^3)\Bigg|_{x=1}^{x=2} dy = \int\limits_3^4 \left((7y + 6y^3\right)dy = 7\frac{y^2}{2} + \frac{3}{2}y^4\Bigg|_3^4 = 287.$$

12.1.2. Зміна порядку інтегрування

При зміні порядку інтегрування прагнуть: а) якщо можливо, вибрати такий порядок інтегрування, при якому область інтегрування не розбивається на частини; б) одержати простіший для обчислення повторний інтеграл.

По межах інтегрування визначають область D. Так, для інтеграла

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy$, покладаючи $y=y_1(x)$ і $y=y_2(x)$ одержимо рівняння ліній, що обмежують область D: $x=a$, $x=b$, $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$.

Потім інтегруємо в іншому порядку.

Приклад 3. Змінити порядок інтегрування в повторному інтегралі.

$$I=\int_0^{2a}dx\int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}}f(x,y)dy(a>0).$$

Відновимо область інтегрування, задану нерівностями:
$0\le x\le 2a,\sqrt{2ax-x^2}\le y\le\sqrt{2ax}$. Маємо

$$\left\| \begin{array}{c} y=\sqrt{2ax-x^2}\Rightarrow x=a\pm\sqrt{a^2-y^2}; \\ y=\sqrt{2ax}\Rightarrow x=\frac{y^2}{2a} \end{array} \right\|.$$

Область інтегрування зображена на рис.12.3. Дуга кола *OA* має рівняння:

$x=a-\sqrt{a^2-y^2}$; дуга кола AB: $x=a+\sqrt{a^2-y^2}$;

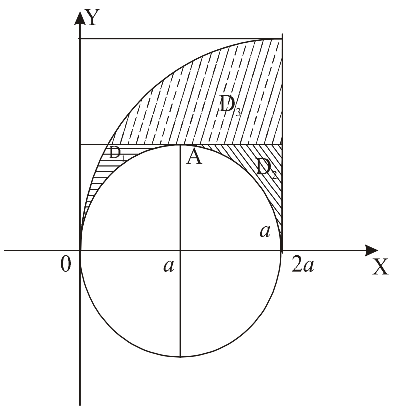

Рис. 12.3

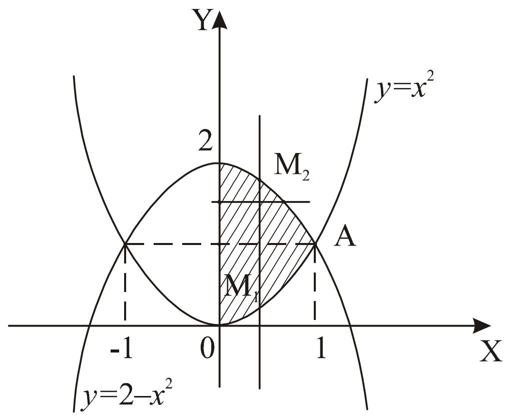

Рис. 12.4

Проектуючи область інтегрування на вісь *Oy,* одержуємо три області: D_1, D_2, D_3.

$$I=\int_0^a dy\int_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}}f(x,y)dx+\int_0^a dy\int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a}f(x,y)dx+\int_a^{2a}dy\int_{y^2/2a}^{2a}f(x,y)dx.$$

Приклад 4. Обчислити інтеграл $I=\iint\limits_D\sqrt{x}\,ydxdy$, якщо область інтегрування D задається нерівностями $x\ge 0, y\ge x^2, y\le 2-x^2$.

Область D представлена на рис.12.4. Точка перетину парабол має координати *A(1,1).* Проекція області *D* на вісь абсцис є відрізок *[0,1].* Вертикальна пряма при будь-якому постійному *x* перетинає *D* тільки у двох точках: у точці M_1 кривої $y=x^2$ і M_2 кривої $y=2-x^2$, при цьому вид аналітичного виразу функцій для всіх $x\in[0,1]$ залишається незмінним.

Тоді: $I=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{2-x^2}\sqrt{x}y\,dy=\int\limits_0^1\sqrt{x}\,\frac{y^2}{2}\Big|_{x^2}^{2-x^2}dx=\int\limits_0^1\sqrt{x}\,\frac{1}{2}\left(\left(2-x^2\right)^2-x^4\right)dx=$

$=\int\limits_0^1\left(2\sqrt{x}-2x^{5/2}\right)dx=\left(\frac{4}{3}x^{3/2}-\frac{4}{7}x^{7/2}\right)\Big|_0^1=\frac{16}{21}.$

Обчислимо інтеграл, проектуючи область *D* на вісь *OУ,* тобто внутрішній інтеграл візьмемо по *x,* а зовнішній по *y*. Проекцією є відрізок *[0,2]*. При зміні $y\in[0,2]$ ділянки верхньої межі визначаються різними рівняннями $y=x^2$ й $y=2-x^2$, тому інтеграл по області *D* потрібно представити у вигляді суми інтегралів по областях D_1 й D_2. В зв’язку з тим, що внутрішні інтеграли будуть обчислюватися по змінній *x*, то рівняння ліній, що обмежують кожну з областей D_1 й D_2, повинні бути виражені відносно цієї змінної. Оскільки $x\geq 0$, то $x_1=\sqrt{y},\ \ x_2=\sqrt{2-y}$. Тоді

$I=\int\limits_0^1 dy\int\limits_0^{\sqrt{y}}\sqrt{x}y\,dx+\int\limits_1^2 dy\int\limits_0^{\sqrt{2-y}}\sqrt{x}y\,dx=\int\limits_0^1 y\,\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{y}}dy+\int\limits_1^2 y\,\frac{2}{3}x^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{2-y}}dy=$

$=\frac{2}{3}\left(\int\limits_0^1 y^{7/4}dy-\int\limits_1^2\left(\left(2-y\right)-2\right)\left(2-y\right)^{3/4}dy\right)=$

$=\frac{2}{3}\left(\frac{4}{11}+\frac{4}{11}\left(2-y\right)^{11/4}\Big|_1^2-\frac{8}{7}\left(2-y\right)^{7/4}\Big|_1^2\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{4}{11}-\frac{4}{11}+\frac{8}{7}\right)=\frac{16}{21}.$

12.1.3. Заміна змінних у подвійному інтегралі

Обчислення подвійних інтегралів іноді вдається спростити, зробивши заміну змінних. Нехай *x=x(u,v), y=y(u,v)* — взаємно однозначне відображення деякої області σ площини *uov* на область *D* площини *X0Y*. Тоді, в припущенні неперервності частинних похідних функцій *x(u,v)* і *y(u,v)* по *u* і по v , має місце формула

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_\sigma f(x(u,v),y(u,v))\left|I(u,v)\right|dudv, \qquad (12.1.\ 3)$$

яка називається формулою заміни змінних у подвійному интегралі. Якобіан перетворення має вигляд:

$$I=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v}\\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}=\frac{\partial x}{\partial u}\cdot\frac{\partial y}{\partial v}-\frac{\partial x}{\partial v}\cdot\frac{\partial y}{\partial u}.$$

Зокрема, у полярних координатах формула 12.1.3 має вигляд:

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_\sigma f(\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi, \qquad (12.1.4)$$

де $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, $I(\rho,\varphi)=\rho$—якобіан переходу до полярних координат.

Розміщення меж при обчисленні подвійного інтеграла в полярних координатах можна робити, використовуючи зображення області *D* на

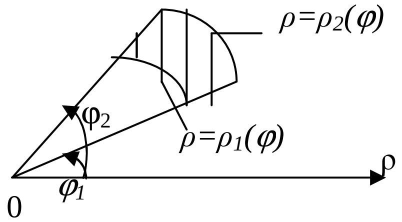

Рис.12.5.

площині *XOY*. Якщо область *D* обмежена двома кривими, полярні рівняння яких $\rho=\rho_1(\varphi)$ і $\rho=\rho_2(\varphi)$ $(\rho_1(\varphi)\le\rho_2(\varphi))$ і променями $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\iint\limits_\sigma f(\rho\cdot\cos\varphi,\rho\cdot\sin\varphi)\rho d\rho d\varphi=\int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2}d\varphi\int\limits_{\rho_1(\varphi)}^{\rho_2(\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho.$$

Якщо область містить початок координат, то

$\iint\limits_D f(x,y)dxdy=\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{\rho(\varphi)}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)\rho d\rho$, де $\rho=\rho(\varphi)$ -*полярне* рівняння кривої, що обмежує область *D*.

Полярні координати зручно використовувати, якщо область є круг або його частина.

Приклад 5. Обчислити $\iint\limits_D ydxdy$, якщо область *D* обмежена верхньою дугою кола $x^2+y^2=ax$ і віссю *OX*.

Розв’язання. Введемо полярні координати $x=\rho\cos\varphi$, $y=\rho\sin\varphi$, тоді рівняння кола прийме вид: $\rho=a\cos\varphi$. Кут (змінюється від 0 до $\pi/2$) (Рис. 12.6).

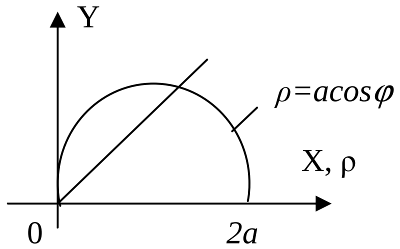

Рис. 12.6.

При кожному фіксованому значенні φ ρ змінюється від 0 до $\rho=a\cos\varphi$. Тоді за формулою (12.1. 6) маємо:

$$\iint\limits_D ydxdy=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int\limits_0^{a\cos\varphi}\rho^2\sin\varphi d\rho$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi d\varphi\int\limits_0^{a\cos\varphi}\rho^2 d\rho=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{a\cos\varphi}d\varphi==\frac{a^3}{12}.$$

Приклад 6. Обчислити $I=\iint\limits_D\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}dxdy$, де область обмежена еліпсом.

Розв’язання. Введемо так звані узагальнені полярні координати, покладаючи $x=a\rho\cos\varphi$, $y=b\rho\sin\varphi$. Якобіан перетворення

$$I=\begin{vmatrix}a\cos\varphi & -a\rho\sin\varphi\\ b\sin\varphi & b\rho\cos\varphi\end{vmatrix}=ab\rho$$

Кут φ міняється від *0* до 2π. Рівняння еліпса в узагальнених полярних координатах $\rho=1$, тому ρ змінюється від *0* до *1*;

$$1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1-\rho^2\cos^2\varphi-\rho^2\sin^2\varphi=1-\rho^2.$$

$$I=ab\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^1\sqrt{1-\rho^2}\rho d\rho=ab\cdot2\pi\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{(1-\rho^2)^{\frac{3}{2}}}{3/2}\right)\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}\pi ab.$$

Приклад 7.

У теорії ймовірностей і математичній статистиці використовується інтеграл Пуассона $I=\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx$.

Первісна для підінтегральної функції $f(x)=e^{-x^2}$ не виражається в елементарних функціях, однак даний невласний інтеграл може бути обчислений за допомогою подвійного інтеграла.

Оскільки визначений інтеграл не залежить від позначення змінної інтегрування, запишемо:

$$I^2=\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx\cdot\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy=\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}e^{-(x^2+y^2)}dxdy.$$

Областю інтегрування є перший квадрант системи координат (Рис.12.7)

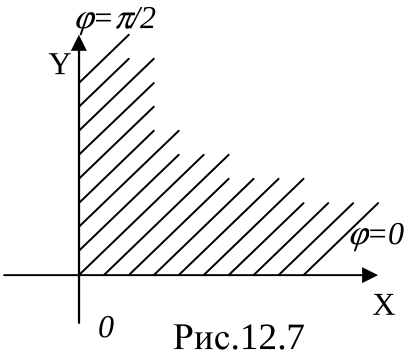

Рис.12.7

Переходячи до полярних координат, одержимо:

$$0\le\varphi\le\frac{\pi}{2},\quad 0<\rho<\infty,\quad x^2+y^2=\rho^2.$$

$$I^2=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\infty}e^{-\rho^2}\rho d\rho=\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A}e^{-\rho^2}\rho d\rho=\frac{\pi}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\lim_{A\to+\infty}\int_0^{a}e^{-\rho^2}d\left(-\rho^2\right)=$$

$$-\frac{\pi}{4}\lim_{A\to+\infty}\left(e^{-A^2}-e^0\right)=\frac{\pi}{4},\text{ де }\lim_{A\to\infty}e^{-A^2}=0\ ,$$

Отже, інтеграл Пуассона дорівнює:

$$\int_0^{\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

12.2. Застосування подвійних інтегралів

Обчислення об'ємів тіл.

Циліндричне тіло, обмежене знизу областю D площини XOY, зверху – поверхнею $z=f(x,y)$, збоку – циліндричною поверхнею з твірними, паралельними осі OZ і з напрямною – межею області *D*, має об'єм $V=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$.

Приклад. Подвійним інтегруванням знайти об'єм тіла, обмеженого циліндрами $y=\sqrt{x}$, $y=2\sqrt{x}$ і площинами $z=0$, $x+z=6$ (рис. 12.8).

Розв'язання. Тіло обмежене зверху площиною $x+z=6$, знизу площиною z = 0 і двома циліндрами $y=\sqrt{x}$ та $y=2\sqrt{x}$, що проектують його на площину *xOy* в область *D*, обмежену прямою $x=6$ і параболами $y=\sqrt{x}$ та $y=2\sqrt{x}$ (рис. 12.9).

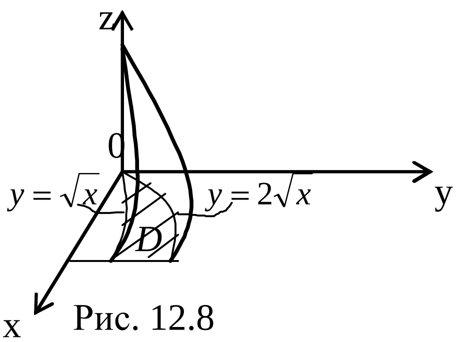

Рис. 12.8

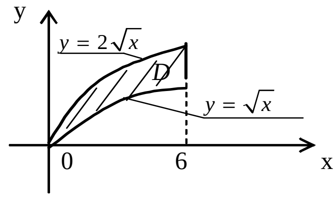

Рис. 12.9

При цьому змінна x змінюється від 0 до 6; при будь-якому значенні x із зазначеного проміжку $\sqrt{x} < y < 2\sqrt{x}$. Об'єм знаходимо за формулою

$V = \iint\limits_D f(x,y)dxdy$. У даному випадку $z = f(x,y) = 6 - x$. Тоді

$$V = \iint\limits_D (6-x)dxdy = \int\limits_0^6 (6-x)dx \int\limits_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dy = \int\limits_0^6 (6-x)y\Big|_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^6 (6-x)\left(2\sqrt{x}-\sqrt{x}\right)dx =$$

$$= \int\limits_0^6 \left(6\sqrt{x} - x\sqrt{x}\right)dx = \left(6\frac{x^{3/2}}{3/2} - \frac{x^{5/2}}{5/2}\right)\Bigg|_0^6 = 24\sqrt{6} - \frac{72}{5}\sqrt{6} = \frac{48\sqrt{6}}{5}.$$

Приклад. Подвійним інтегруванням знайти об'єм тіла, обмеженого циліндрами $x^2+y^2=x$ та $x^2+y^2=2x$, параболоїдом $z=x^2+y^2$ і площинами $x + y = 0, x - y = 0, z = 0$.

Розв'язання. **Дане циліндричне тіло обмежене зверху поверхнею $z = x^2 + y^2$. Об'єм його**

$$v = \iint\limits_D f(x,y)dxdy = \iint\limits_D zdxdy = \iint\limits_D \left(x^2+y^2\right)dxdy.$$

Побудуємо область D, що зображує проекцію тіла на *площину* xOy (рис.12.10). Область D обмежена колами

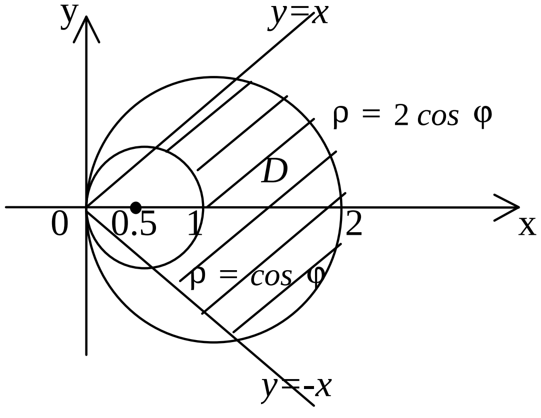

Рис. 12.10

$$x^2 + y^2 = x$$

або $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2$,

$x^2+y^2=2x$ або $(x-1)^2+y^2=1$ і прямими $y = -x$, $y = x$.

У полярних координатах рівняння кола має вигляд: $\rho=\cos\varphi$ і $\rho=2\cos\varphi$; рівняння прямих: $\varphi=-\frac{\pi}{4}$ і $\varphi=\frac{\pi}{4}$. Знаходимо:

$$v=\int\limits_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int\limits_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}\rho^3d\rho=(\text{внаслідок симетрії})\;=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left.\frac{\rho^4}{4}\right|_{\cos\varphi}^{2\cos\varphi}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(16\cos^4\varphi-\cos^4\varphi\right)d\varphi=\frac{15}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\right)^2d\varphi=$$

$$=\frac{15}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+2\cos 2\varphi+\cos^2 2\varphi\right)d\varphi=\frac{15}{8}\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(1+2\cos 2\varphi+\frac{1+\cos 4\varphi}{2}\right)d\varphi=$$

$$=\frac{15}{8}\left(\frac{3}{2}\varphi+\sin 2\varphi+\frac{\sin 4\varphi}{8}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{15}{8}\left(\frac{3\pi}{8}+1\right).$$

Приклад. Знайти об'єм тіла, вирізаного з кулі радіусом R, прямим круговим циліндром радіусом $R/2$, твірна якого проходить через центр кулі.

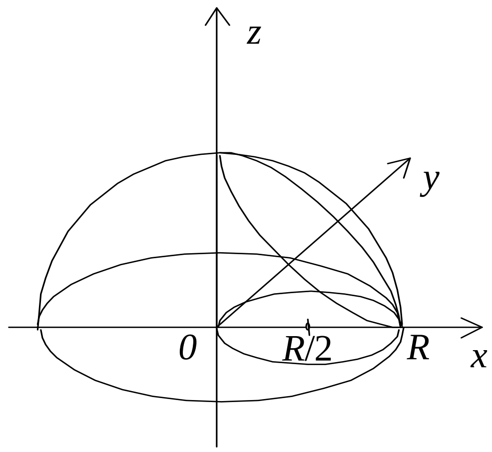

Рис. 12.11.

Розв’язання. Помістимо початок координат у центр кулі, вісь OZ направимо уздовж твірної циліндра, а вісь OX – уздовж діаметра основи циліндра (рис. 12.11)

Рівняння сфери має вигляд: $x^2+y^2+z^2=R^2$, тоді в першому октанті $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ і внаслідок симетрії об’єм тіла, вирізаного циліндром з кулі, буде рівним:

$$V=4\iint\sqrt{R^2-x^2-y^2}\,dxdy.$$

Проекція тіла на площину xOy збігається з кругом $x^2+y^2\le Rx$. Щоб обчислити отриманий інтеграл, зручно перейти до полярних координат.

Рівняння кола $x^2 + y^2 = Rx$ в полярних координатах має вид $\rho = R\cos\varphi$. Кут φ змінюється від 0 до $\pi/2$ (враховуємо симетрію), ρ змінюється в межах $0 \le \rho \le R\cos\varphi$. Переходячи до полярних координат, одержимо:

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{R\cos\varphi} \sqrt{R^2 - \rho^2}\rho d\rho;$$

$$\frac{V}{4} = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2}{3}\left(R^2 - \rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^{R\cos\varphi} d\varphi = -\frac{R^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(\sin^3\varphi - 1\right)d\varphi =$$

$$= \frac{\mathrm{R}^3}{3}\int_0^{\pi/2}\left(1 - \cos^2\varphi\right) d(\cos\varphi) + \frac{\pi R^3}{6} = \frac{\mathrm{R}^3}{3}\left(\cos\varphi - \frac{\cos^3\varphi}{3}\right)\Big|_0^{\pi/2} + \frac{\pi R^3}{6} = \frac{R^3}{3}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$$

Отже, $V = \frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$.

Обчислення маси неоднорідної пластини.

Пластина, що займає область D у площині XOY і має щільність $\rho(x, y)$, має масу

$$m = \iint_D \rho(x, y) dxdy.$$

Обчислення статичних моментів і моментів інерції пластини.

Статичні моменти пластини відносно осей OX і OY відповідно рівні

$$M_x = \iint_D y\ \rho(x, y)dxdy,\ M_y = \iint_D x\ \rho(x, y)dxdy.$$

Момент інерції пластини відносно початку координат визначається за формулою $I_0 = \iint_D (x^2 + y^2)\rho(x, y)dxdy.$

Моменти інерції пластини відносно осей OX і OY будуть відповідно $I_x = \iint_D y^2\rho(x, y)dxdy,\ I_y = \iint_D x^2\rho(x, y)dxdy.$

Знаходження центра ваги пластини.

Координати центра ваги x_c та y_c неоднорідної пластини дорівнюють, відповідно, відношенням статичних моментів відносно осей OY й OX до маси пластини:

$$x_c = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\rho(x, y)dxdy}{\iint_D \rho(x, y)dxdy};\ y_c = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\rho(x, y)dxdy}{\iint_D \rho(x, y)dxdy};$$

Якщо пластина однорідна:

$$x_c = \frac{\iint\limits_D xdxdy}{S}; \; y_c = \frac{\iint\limits_D ydxdy}{S}.$$

Приклад. Знайти момент інерції квадрата зі стороною *a*, поверхнева щільність якого пропорційна відстані до однієї із сторін квадрата, відносно вершини, що належить даній стороні.

Розв'язання. Нехай квадрат розташований у площині *xOy*; одна з його вершин належить початку координат, а дві інші збігаються з осями координат. Відзначимо, що момент інерції не залежить від вибору системи координат. Шуканий момент інерції дорівнює моменту інерції квадрата щодо початку координат з поверхневою щільністю *kx*, де *k* – *коефіцієнт* пропорційності (беремо поверхневу щільність, пропорційну відстані до осі Oy). Тоді

$$I_0 = \iint\limits_D \left(x^2 + y^2\right) kxdxdy = k\int\limits_0^a xdx \int\limits_0^a \left(x^2 + y^2\right)dy = k\int\limits_0^a x\left(x^2 y + \frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_0^a dx =$$

$$= k\int\limits_0^a x\left(x^2 a + \frac{a^3}{3}\right)dx = k\int\limits_0^a \left(x^3 a + x\frac{a^3}{3}\right)dx = k\left(a\frac{x^4}{4} + \frac{x^2 a^3}{6}\right)\Bigg|_0^a = \frac{5ka^5}{12}.$$

.

12.3. Потрійні інтеграли і їх обчислення в декартовій системі координат

Нехай у правильній, замкненій обмеженій області *V* задана обмежена функція $f(x, y, z)$. Потрійним інтегралом від функції $f(x, y, z)$ по області *V* називається:

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i = \iiint\limits_V f(x, y, z)dV = \iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz.$$

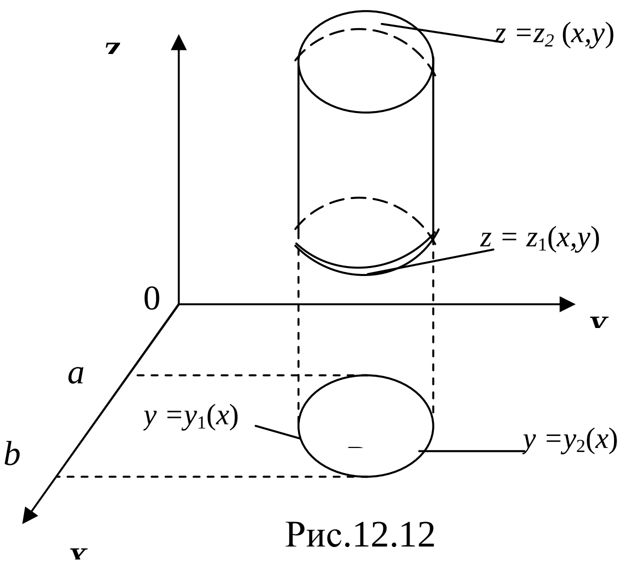

Рис.12.12

Обчислення потрійного інтеграла в декартовій системі координат зводиться до обчислення подвійного інтеграла по проекції *D* об'єму *V* на будь-яку координатну площину (у даному випадку *XOY*) і внутрішнього інтеграла по третій змінній (змінна z) (рис.12.12). Внутрішній інтеграл береться від нижньої межі $z = z_1(x,y)$ області *V* до її верхньої межі $z = z_2(x,y)$ (передбачається, що область є правильною в напрямі осі *Oz*):

$$\iiint\limits_V f(x, y, z)dxdydz = \iint\limits_D dxdy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)d$$

Враховуючи правила обчислення подвійного інтеграла, останню формулу можна переписати таким чином:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int\limits_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)dz.$$

Якщо область V є неправильною, то її розбивають на скінченне число правильних областей і обчисляюють інтеграл, використовуючи властивість адитивності потрійного інтеграла.

Якщо областю інтегрування є прямокутний паралелепіпед, обмежений площинами $x = a,\ x = b\ (a < b),\ y = c,\ y = d\ (c < d),\ z = m,\ z = n\ (m < n)$, то межі інтегрування будуть сталими, тобто

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d dy \int\limits_m^n f(x,y,z)dz.$$

У випадку, якщо $f(x,y,z) \equiv 1$, то потрійний інтеграл чисельно дорівнює об'єму області інтегрування.

Приклад. Обчислити об'єм тіла, обмеженого поверхнями $z = x^2 + y^2,\ z = 2(x^2 + y^2),\ y = x,\ y = x^2$.

Розв'язання. Тіло обмежене площиною $y = x$, циліндром $y = x^2$ і параболоїдами обертання $z = x^2 + y^2,\ z = 2(x^2 + y^2)$. Нехай D - проекція тіла на площину *xOy;* у даному випадку проектуючими поверхнями є площина

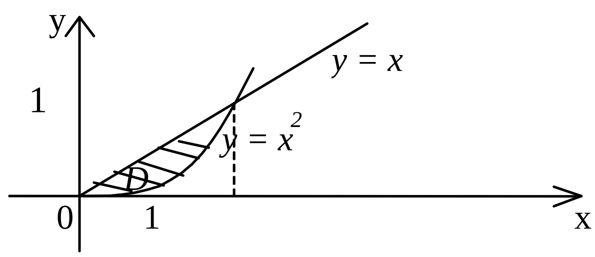

Рис. 12.13.

$y = x$ і циліндр $y = x^2$ (рис. 12.13). Тоді об'єм

$$V=\iiint\limits_{v}dv=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x}dy\int\limits_{x^2+y^2}^{2\left(x^2+y^2\right)}dz\;=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x} z\Big|_{x^2+y^2}^{2\left(x^2+y^2\right)}dy=\int\limits_0^1 dx\int\limits_{x^2}^{x}\left(x^2+y^2\right)dy=$$

$$\int\limits_0^1\left(x^2y+\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{x^2}^{x}dx=\int\limits_0^1\left(\frac{4x^3}{3}-x^4-\frac{x^6}{3}\right)dx=\frac{3}{35}.$$

Приклад. Обчислити масу тіла, обмеженого циліндром $x^2=2y$ і площинами $z=0$, $2y+z=2$, якщо в кожній його точці об'ємна щільність чисельно дорівнює аплікаті цієї точки.

Розв'язання. Циліндричне тіло (рис. 12.14) обмежено зверху площиною $z=2-2y$, що перетинається з площиною $z=0$ по прямій $y=1$. Маса тіла, що займає область V, обчислюється через потрійний інтеграл: $m=\iiint\limits_V\rho(x,y,z)dxdydz$, де $\rho(x,y,z,)$ - об'ємна щільність.

В нашій задачі $\rho(x,y,z)=z$, тому

$$m=\iiint\limits_V zdxdydz=\int\limits_0^1 dy\int\limits_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}}dx\int\limits_0^{2-2y}zdz=2\int\limits_0^1(1-y)^2dy\int\limits_{-\sqrt{2y}}^{\sqrt{2y}}dx=4\int\limits_0^1(1-y)^2\sqrt{2y}dy$$

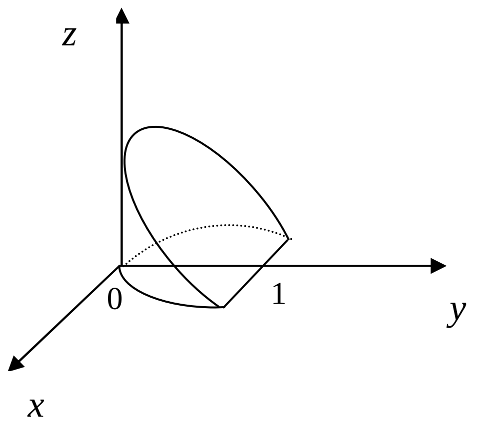

Рис.12.14

12.4. Потрійні інтеграли і їх обчислення в циліндричній і сферичній системах координат

Заміна змінних у потрійному інтегралі: нехай функція $f(x,y,z)$ неперервна в області V і формули.

$$x=x(u,v,w);\;\; y=y(u,v,w),\;\; z=z(u,v,w)$$

встановлюють взаємно однозначну відповідність між точками $M(x,y,z)$ області V і точками $M'(u,v,w)$ деякої області V', тоді

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz=\iiint\limits_{V'} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|J\right|dudvdw,$$

де $|J|$ - абсолютне значення якобіана.

У *циліндричній* системі координат положення точки визначається полярними координатами φ, ρ та аплікатою z (рис. 12.15), а формули, що зв'язують прямокутні і циліндричні координати мають вигляд: $x = \rho\cos\varphi$; $y = \rho\sin\varphi$; $z = z$. Модуль Якобіана дорівнює $|J| = \rho$, тоді

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)\rho d\rho d\varphi dz.$$

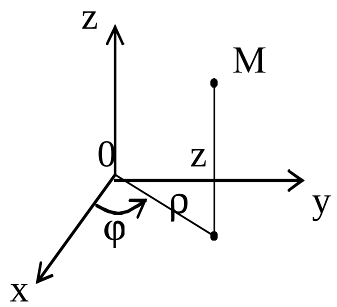

Рис. 12.15

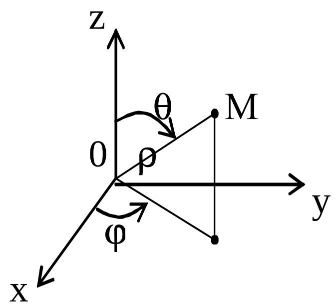

Рис. 12.16

Якщо областю інтегрування є круговий циліндр із віссю *Oz*, то потрійний інтеграл за цією областю в циліндричній системі координат матиме сталі межі по всіх змінних, тобто

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho d\rho \int\limits_0^H f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi, z)dz.$$

Сферичні координати ρ, φ, θ зв'язані з прямокутними координатами співвідношеннями:

$$x = \rho\sin\theta\cos\varphi,\ y = \rho\sin\theta\sin\varphi,\ z = \rho\cos\theta,\ |J| = \rho^2\sin\theta.$$

Перехід у потрійному інтегралі до сферичних координат здійснюється за формулою:

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_{V'} f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta d\rho d\varphi d\theta.$$

Очевидно, якщо областю інтегрування є куля з центром на початку координат і радіусом *R*, то потрійний інтеграл за цією областю в сферичній системі координат матиме сталі межі інтегрування по всіх змінних, тобто

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)dV = \int\limits_0^{\pi} \sin\theta d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^2 f(\rho\sin\theta\cos\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\theta)d\rho.$$

Нижче на конкретних прикладах проілюстровані правила для розставлення меж інтегрування в циліндричній і сферичній системах координат і показані їх геометричні та фізичні застосування.

Приклад. Обчислити $\iiint\limits_V xyzdxdydz$, де V – частина області, яка обмежена сферою $x^2+y^2+z^2=4$ і параболоїдом $x^2+y^2=3z$, розташована в першому октанті (рис.12.17).

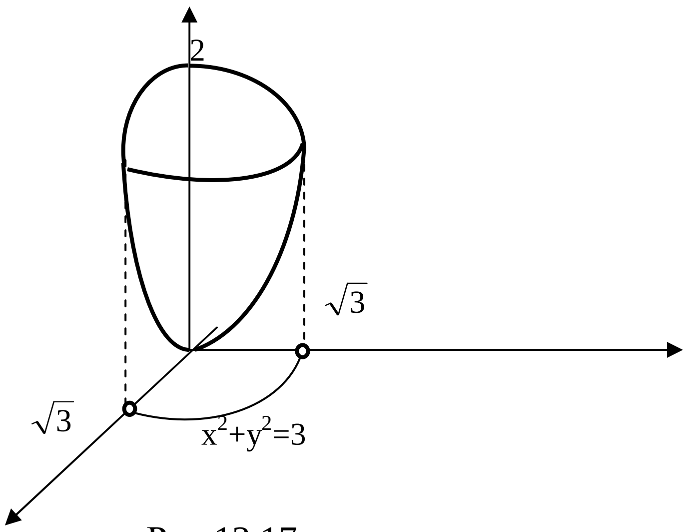

Рис.12.17

Розв'язання. *Перший спосіб*. Обчислення інтеграла в декартовій системі координат. Перед тим, як проектувати об'єм V на площину XOY, знайдемо лінію перетину сфери і параболоїда. Для цього розв'яжемо систему рівнянь

$$\left\{\begin{array}{c} x^2+y^2+z^2=4 \\ x^2+y^2=3z \end{array}\right\} \Rightarrow z^2+3z-4=0 \Rightarrow z=1 \Rightarrow x^2+y^2=3,$$

тобто поверхні перетинаються по колу радіуса $R=\sqrt{3}$, що лежить у площині $z=1$. Поверхня проектується на площину xOy у чверть круга даного радіусу, що знаходиться в першій чверті.

Одержимо:

$$\iint\limits_D xyzdxdydz = \int\limits_0^{\sqrt{3}} xdx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} ydy \int\limits_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} zdz = \frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} xdx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} yz^2 \Bigg|_{\frac{x^2+y^2}{3}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} dy =$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} xdx \int\limits_0^{\sqrt{3-x^2}} y\left(4-x^2-y^2-\frac{(x^2+y^2)^2}{9}\right)dy =$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\left(2y^2-\frac{x^2y^2}{2}-\frac{y^4}{4}-\frac{x^4y^2}{18}-\frac{x^2y^4}{18}-\frac{y^6}{54}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{3-x^2}} dx =$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{13}{4}x-2x^3+\frac{x^5}{4}+\frac{x^7}{54}\right)dx=\frac{27}{32}.$$

Другий спосіб. Обчислення інтеграла в циліндричній системі координат:

$I=\iiint\limits_V xyz\,dxdydz=\iiint\limits_{V'}\rho^3\sin\varphi\cos\varphi\, z\,d\rho\, d\varphi\, dz$, де V' - область зміни циліндричних координат точок області *V*.

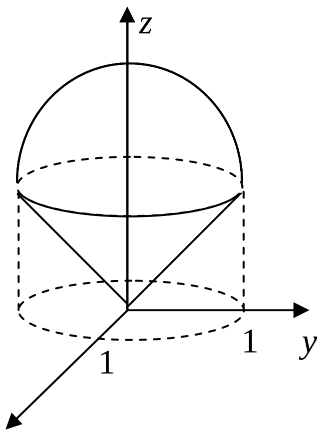

Рис.12.19

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi d\varphi\int_0^{\sqrt{3}}\rho^3 d\rho\int_{\frac{\rho^2}{3}}^{\sqrt{4-\rho^2}} zdz=\frac{1}{2}\frac{\sin^2\varphi}{2}\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\int_0^{\sqrt{3}}\rho^3(4-\rho^2-\frac{\rho}{9}$$

.

Приклад. Обчислити об'єм частини кулі $x^2+y^2+z^2=R^2$ (рис.12.18), розташованої усередині циліндра $\left(x^2+y^2\right)=R^2\left(x^2-y^2\right)$ $(z\geq 0)$.

Розв'язання. Напрямну циліндра, спрямовану лемніскатою, побудуємо, переходячи до полярних координат: $x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$. Полярне рівняння цієї кривої $\rho=R\sqrt{\cos 2\varphi}$. Крива симетрична відносно осей *OX* та *OY*, і при зміні φ від 0 до π/4 поточна точка (ρ, φ) опише четверту частину кривої.

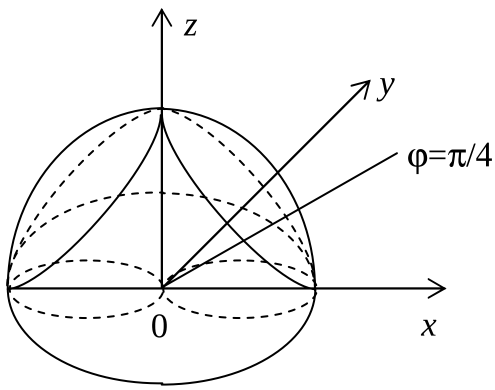

Рис.12.18.

Шуканий об'єм у циліндричній системі координат обчислюється так:

$$V=\iiint\limits_{V_1}\rho d\rho d\varphi dz=4\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{R\sqrt{\cos 2\varphi}}\rho d\rho\int_0^{\sqrt{R^2-\rho^2}}dz=$$

$$4\int_0^{\pi/4}d\varphi\int_0^{R\sqrt{\cos 2\varphi}}\rho\sqrt{R^2-\rho^2}d\rho=$$

$$4\int_0^{\pi/4}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(R^2-\rho^2\right)^{3/2}\Big|_0^{R\sqrt{\cos 2\varphi}}d\varphi=$$

$$\frac{4}{3}\int_0^{\pi/4}R^3\left(1-\left(1-\cos 2\varphi\right)^{3/2}\right)d\varphi=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{4}+\frac{5-4\sqrt{2}}{3}\right).$$

Приклад. Обчислити об'єм тіла $\left(x^2+y^2+z^2\right)^3=a^2\left(x^2+y^2\right)^2$.

Розв'язання. Перейдемо до сферичних координат, тоді рівняння поверхні має вигляд: $\rho^2=a^2\sin^4\theta$ або $\rho=a\sin^2\theta$.

Об'єм тіла в сферичних координатах дорівнює

$$v=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{a\sin^2\theta}\rho^2 d\rho=2\pi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\frac{\rho^3}{3}\Bigg|_0^{a\sin^2\theta}=2\cdot\frac{2\pi a^3}{3}\int_0^{\pi/2}\sin^7\theta d\theta=$$

$$=\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{6!!}{7!!}=\frac{4\pi a^3}{3}\cdot\frac{6\cdot 4\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}=\frac{64\pi a^3}{105}.$$

Приклад. Знайти момент інерції однорідного тіла, обмеженого сферою $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$ і конусом $x^2 + y^2 = z^2$, відносно осі OZ (рис. 12.19).

Розв'язання. Побудуємо дане тіло. Для цього знайдемо лінію перетину поверхонь:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2z \\ x^2 + y^2 = z^2 \end{cases} \Rightarrow 2z^2 = 2z \Rightarrow z = 1,$$

тобто ця лінія є колом радіуса $R = 1$, що лежить у площині $z = 1$. Проекція тіла на площину XOY є круг $x^2 + y^2 \leq 1$.

Момент інерції обчислюється за формулою $I_z = \iiint\limits_V (x^2 + y^2)dxdydz.$

Перейдемо до сферичних координат, тоді всі межі інтегрування будуть сталими. Причому межі для θ можна визначити за допомогою рівняння $x^2+y^2=z^2$, вважаючи $x=0$ (або $y=0$), одержимо, що $y = z \Rightarrow \theta = \dfrac{\pi}{4}$, тобто $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{4}$.

$$I_z = \iiint\limits_{V^!} r^2 \sin^2 \theta r^2 \sin\theta dr d\varphi d\theta = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi/4} \sin^3 \theta d\theta \int\limits_0^{2\cos\theta} r^4 dr = \frac{11\pi}{30}.$$

Розділ 13

КРИВОЛІНІЙНІ ІНТЕГРАЛИ

13.1. Криволінійні інтеграли 1-го роду

Розглянемо просторову кусково-гладку криву L, обмежену точками A і B. Нехай у кожній точці $M(x,y,z)$ цієї кривої визначена неперервна функція $f(x,y,z)=f(M)$. Розіб'ємо дугу AB на n частин точками $A=A_0,\ A_1,\ A_2,...,A_n=B$. На кожній частині $A_{i-1}A_i$ виберемо довільну точку $M_i(x_i,y_i,z_i)$ й обчислимо в ній значення функції $f(x_i,y_i,z_i)$. Число $f(x_i,y_i,z_i)$ помножимо на довжину дуги Δl_i. Утворимо суму

$$S_n=\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\cdot\Delta l_i\,,$$

названу інтегральною сумою по кривій L функції $f(x,y,z)$.

Криволінійним інтегралом I-го роду від функції $f(x,y,z)$ по кривій L називається границя інтегральної суми:

$$\int_L f(x,y,z)dl=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{\max\Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\Delta l_i\,.$$

Якщо функція $f(x,y,z)$ неперервна у всіх точках дуги AB, то ця межа існує і не залежить ні від способу розбивки дуги AB, ні від вибору точки $M_i(x_i,y_i,z_i)$ на кожній з цих частин.

Якщо крива L лежить у площині XOY, то функція f залежить тільки від (x,y):

$$\int_L f(x,y)dl=\lim_{\max\Delta l_i\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i)\Delta l_i\,.$$

13.1.1. Обчислення криволінійних інтегралів 1-го роду

Обчислення криволінійних інтегралів I-го роду зводиться до обчислення визначеного інтеграла. Розглянемо різні способи задання кривої L і перехід до визначеного інтеграла.

а) Якщо крива L задана параметричними рівняннями:

$$L:\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \quad (t_1\le t\le t_2)\,, \\ z=z(t) \end{cases}$$

то $\int\limits_{L} f(x,y,z)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left[x(t),y(t),z(t)\right]\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt$,

оскільки в цьому випадку $dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt$. Якщо крива лежить у площині XOY, то

$$\int\limits_{L} f(x,y)dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} f\left[x(t),y(t)\right]\sqrt{x_t'^2 + y_t'^2}\,dt.$$

б) Якщо плоску криву L задано рівнянням $y = y(x)$, де $a \le x \le b$, то $dl = \sqrt{1 + y_x'^2}\,dx$:

$$\int\limits_{L} f(x,y)dl = \int\limits_{a}^{b} f(x,y(x))\sqrt{1 + y_x'^2}\,dx.$$

в) Якщо плоску криву L задано рівнянням $\rho = \rho(\varphi)$, $(\alpha \le \varphi \le \beta)$ у полярних координатах, то $dl = \sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\,d\varphi$:

$$\int\limits_{L} f(x,y)dl = \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\sqrt{\rho^2 + \rho_\varphi'^2}\,d\varphi.$$

Нижня межа інтегрування в усіх випадках менше верхньої: $a < b$, $t_1 < t_2$, $\alpha < \beta$.

13.1.2. Застосування криволінійних інтегралів 1-го роду

а) *Довжина дуги* AB кривої обчислюється як

$$l = \int\limits_{AB} dl.$$

б) *Маса матеріальної дуги*. Якщо в кожній точці кривої L щільність маси $\gamma(x,y,z)$ є функцією координат цієї точки, то маса дуги кривої

$$m = \int\limits_{(AB)} \gamma(x,y,z)dl.$$

в) *Статичні моменти* плоскої дуги відносно координатних осей визначаються за формулами:

$$M_{OX} = \int\limits_{(AB)} y\gamma(x,y)dl; \quad M_{OY} = \int\limits_{(AB)} x\gamma(x,y)dl.$$

г) *Координати центра ваги* плоскої матеріальної дуги AB:

$$x_c=\frac{M_{OY}}{m}=\frac{\int\limits_{(AB)} x\gamma(x,y)dl}{\int\limits_{(AB)} \gamma(x,y)dl};\quad y_c=\frac{M_{OX}}{m}=\frac{\int\limits_{(AB)} y\gamma(x,y)dl}{\int\limits_{(AB)} \gamma(x,y)dl}.$$

д) *Моменти інерції* матеріальної дуги відносно координатних осей:

$$I_{OX}=\int\limits_{(AB)} y^2\gamma(x,y)dl;\quad I_{OY}=\int\limits_{(AB)} x^2\gamma(x,y)dl.$$

13.1.3. Приклади обчислення криволінійних інтегралів 1-го роду

Приклад. Обчислити $\int\limits_L\left(x^5+8xy\right)dl$, де $L:\quad y=\frac{1}{4}x^4,\quad x_1=0,\quad x_2=1$.

Розв′язання. Визначимо y'_x, dl і перейдемо до визначеного інтеграла:

$y'_x=x^3$, $dl=\sqrt{1+y_x'^2}dx=\sqrt{1+x^6}dx$;

$$\int\limits_L\left(x^5+8xy\right)dl=\int\limits_0^1\sqrt{1+x^6}\left(x^5+8x\cdot\frac{1}{4}x^4\right)dx=\int\limits_0^1\sqrt{1+x^6}\,3x^5dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\sqrt{1+x^6}\,d(x^6+1)=\frac{1}{3}(1+x^6)^{3/2}\Big|_0^1=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right).$$

Приклад. $\int\limits_L(2x+y)dl$, де L – контур трикутника ABC, $A(1,0)$, $B(0,2)$, $C(0,0)$.

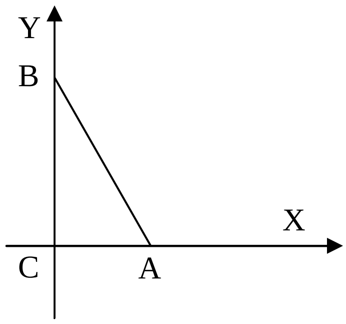

Рис 13.1.

Розв′язання.

$$\int\limits_L(2x+y)dl=\int\limits_{AB}(2x+y)dl+$$

$$+\int\limits_{BC}(2x+y)dl+\int\limits_{CA}(2x+y)dl.$$

Обчислимо кожний інтеграл окремо:

а) $AB:\ \frac{x}{1}+\frac{y}{2}=1;\quad y=-2x+2, y'=-2$;

$dl=\sqrt{1+y_x'^2}dx=\sqrt{5}dx$;

$$\int_{AB}(2x+y)dl=\int_0^1\sqrt{5}[2x+(-2x+2)]dx=2\sqrt{5}\int_0^1 dx=2\sqrt{5};$$

б) $BC: x=0, x'_y=0;\quad dl=\sqrt{1+x'^2_y}\,dy=dy;$

$$\int_{BC}(2x+y)dl=\int_0^2 ydy=\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^2=2;$$

в) $CA: y=0, y'_x=0;\quad dl=\sqrt{1+y'^2_x}\,dx=dx;$

$$\int_{CA}(2x+y)dl=\int_0^1 2xdx=x^2\Big|_0^1=1.$$

Отже, $\int\limits_L(2x+y)dl=2\sqrt{5}+2+1=3+2\sqrt{5}$.

Приклад. Обчислити $\int\limits_L(2x+4y-4z+1)dl$, де L- відрізок прямої між точками $M_1(8,9,3)$ і $M_2(6,10,5)$.

Розв′язання. Складемо рівняння прямої, що проходить через точки M_1 і M_2:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1};\quad \frac{x-8}{-2}=\frac{y-9}{1}=\frac{z-3}{2}=t.$$

Якщо ввести параметр t, одержимо рівняння:

$$\begin{cases} x=-2t+8 \\ y=t+9\ \ ,0\le t\le 1; \\ z=2t+3 \end{cases}$$

$$dl=\sqrt{x'^2_t+y'^2_t+z'^2_t}\,dt=\sqrt{4+1+4}\,dt=3dt;$$

$$\int_L(2x+4y-4z+1)dl=3\int_0^1\left[2(-2t+8)+4(t+9)-4(2t+3)+1\right]dt=3\int_0^1(41-8t)dt=111.$$

Приклад. Обчислити $\int\limits_L(x+y)dl$, де L: пелюстка лемніскати $\rho=\sqrt{\sin 2\varphi}$, розташована у першому координатному куті.

Розв’язання.

$$\rho=a\sqrt{\sin 2\varphi},\begin{cases} x=\rho\cos\varphi, \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases}\quad dl=\sqrt{\rho^2+\rho'^2_\varphi}\,d\varphi.\quad \rho'_\varphi=\frac{a\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}};\quad \rho'^2_\varphi=\frac{a^2\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi};$$

$$\rho^2+\rho'^2_\varphi=a^2\sin 2\varphi+\frac{a^2\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}=\frac{a^2}{\sin 2\varphi}\ .$$

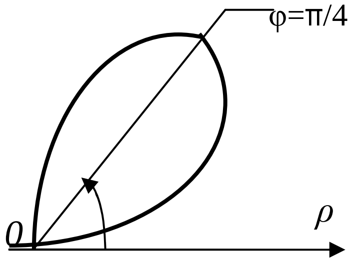

Рис. 13.2

Для встановлення меж інтегрування слід визначити проміжок зміни φ, що відповідає пелюстці кривої у першому координатному куті. Очевидно, $\varphi\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Тоді

$$\int\limits_L (x+y)dl=\int\limits_0^{\pi/2}(\rho\cos\varphi+\rho\sin\varphi)\frac{a}{\sqrt{\sin 2\varphi}}d\varphi=$$

$$=a^2\int\limits_0^{\pi/2}(\cos\varphi+\sin\varphi)d\varphi=a^2(\sin\varphi-\cos\varphi)\Big|_0^{\pi/2}=a^2(1+1)=2a^2.$$

Приклад. Обчислити $\int\limits_L\sqrt{2x^2+y^2}dl.\ L: x^2+y^2+z^2=a^2,\ z=x$.

Розв′язання. Лінія задана перетином двох поверхонь: сфери і площини. Складемо параметричні рівняння цієї лінії. Для цього, підставляючи в рівняння сфери $z=x$, одержимо спочатку рівняння проекції заданої лінії на площину XOY:

$$\frac{x^2}{a^2/2}+\frac{y^2}{a^2}=1.$$

Ця проекція є еліпс з півосями $a/\sqrt{2}$ та a. Параметричні рівняння еліпса мають вигляд:

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t;\ y=a\sin t;\ t\in[0,2\pi].$$

Оскільки $z=x$, параметричне рівняння лінії L має вигляд:

$$x=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t;\ y=a\sin t;\ z=\frac{a}{\sqrt{2}}\cos t;\ t\in[0,2\pi].$$

Знайдемо:

$$dl=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}dt=\sqrt{2\frac{a^2}{2}\sin^2 t+a^2\cos^2 t}dt=adt;$$

$$\int\limits_L\sqrt{2x^2+y^2}dl=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{2\frac{a^2}{2}\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\cdot a\cdot dt=a^2\int\limits_0^{2\pi}dt=2\pi a^2.$$

Приклад. Знайти довжину дуги гвинтової лінії: $L:\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \\ z = 3t \end{cases}, \ (0 \le t \le 2\pi).$

Розв′язання. $L:\begin{cases} x = 4\cos t \\ y = 4\sin t \\ z = 3t \end{cases}, \ (0 \le t \le 2\pi) \Rightarrow \begin{cases} x_t' = -4\sin t \\ y_t' = 4\cos t \\ z_t' = 3 \end{cases};$

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt = \sqrt{16\sin^2 t + 16\cos^2 t + 9}\,dt = 5dt;$$

$$l = \int_L dl = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt = \int_0^{2\pi} 5dt = 5t\Big|_0^{2\pi} = 10\pi.$$

Приклад. Знайти центр ваги гвинтової лінії: $x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt,\ t \in \left[0, \pi/2\right]$, якщо лінійна щільність у кожній точці є пропорційною добутку перших двох координат.

Розв′язання. Для розвязання використовуємо формули:

$$x_C = \frac{\int_L x\gamma(x,y,z)dl}{\int_L \gamma(x,y,z)dl};\quad y_C = \frac{\int_L y\gamma(x,y,z)dl}{\int_L \gamma(x,y,z)dl};\quad z_C = \frac{\int_L z\gamma(x,y,z)dl}{\int_L \gamma(x,y,z)dl}.$$

Знайдемо масу дуги: $m = \int_L \gamma(x,y,z)dl$. Відповідно до умови, $\gamma(x,y,z) = kxy$, тоді

$$dl = \sqrt{x_t'^2 + y_t'^2 + z_t'^2}\,dt = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2}\,dt = \sqrt{a^2 + b^2}\,dt;$$

$$m = \int_0^{\pi/2} kxy\sqrt{a^2+b^2}\,dt = k\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi/2} a^2\cos t\sin t\,dt =$$

$$a^2k\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\sin^2 t}{2}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{a^2k\sqrt{a^2+b^2}}{2};$$

$$\int_L x\gamma(x,y,z)dl = ka^3\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi/2}\cos^2 t\sin t\,dt = \frac{ka^3\sqrt{a^2+b^2}}{3};$$

$$\int_L y\gamma(x,y,z)dl = ka^3\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos t\,dt = \frac{ka^3\sqrt{a^2+b^2}}{3};$$

$$\int_L z\gamma(x,y,z)dl = kba^2\sqrt{a^2+b^2}\int_0^{\pi/2} t\sin t\cos t dt = \frac{a^2bk\sqrt{a^2+b^2}}{2}\int_0^{\pi/2} t\sin 2t dt =$$

$$= \frac{a^2bk\sqrt{a^2+b^2}}{2}\,\frac{\pi}{4}; \to \; x_c = 2a/3,\; y_c = 2a/3,\; z_c = \pi b/4.$$

13.2. Криволінійні інтеграли 2-го роду

1) Нехай L кусково-гладка просторова крива, на якій задано напрям, а $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ – неперервні функції на ній. Розіб'ємо криву L на елементарні ділянки $A_{i-1}A_i$, проекції яких на координатні осі *Ox, Oy, Oz* відповідно позначимо $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$, $\Delta z_i = z_i - z_{i-1}$. Виберемо на кожній з ділянок довільну точку $M_i(\xi_i, \eta_i, \varsigma_i)$ й обчислимо значення функції в цій точці.

Створимо суму:

$$W_n = \sum_{i=1}^{n} P(M_i)\Delta x_i + Q(M_i)\Delta y_i + R(Mi)\Delta z_i,$$

що називається інтегральною сумою по координатах. Якщо при наближенні до нуля ця сума має скінчену межу *W,* що не залежить від способу розбивки кривої і вибору точок M_i, то ця межа називається криволінійним *інтегралом II-го роду* по кривій L і позначається

$$W = \int_L P(x,y,z)dx + Q(x,y,z)dy + R(x,y,z)dz.$$

Криволінійний інтеграл II-го роду залежить від вибору напряму кривої. Якщо змінити напрям кривої, то інтеграл змінює знак:

$$\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz = -\int_{BA} Pdx + Qdy + Rdz.$$

За своїм фізичним змістом криволінійний інтеграл II-го роду є робота змінної сили $\vec{F} = (P, Q, R)$, точка прикладання якої описує криву L.

2) *Обчислення криволінійного інтеграла II-го роду* зводиться до обчислення визначеного інтеграла.

а) Якщо плоска крива задана рівнянням $y = y(x)$, $x \in [a,b]$, причому початку кривої відповідає $x = a$, а кінцю – $x = b$, то

$$\int_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_a^b P[x,y(x)]dx + Q[x,y(x)]y'_x dx.$$

б) Якщо крива L задана параметричними рівняннями і початку кривої відповідає значення параметра $t = t_1$, а кінцю – $t = t_2$:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, \quad t \in [t_1, t_2],$$

то $\int\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} P[x(t), y(t)]x'_t dt + Q[x(t), y(t)]y'_t dt$.

Зверніть увагу, що у випадку а) і у випадку б) нижня межа інтеграла не обов'язково менше верхньої.

В однозв′язній області D для функцій P, Q, R , що мають неперервні похідні першого порядку, необхідною і достатньою умовою повного диференціала є виконання таких рівностей:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

в) Якщо під знаком інтеграла стоїть повний диференціал

$$Pdx + Qdy + Rdz = dU(x,y,z),$$

то незалежно від форми кривої L, повністю розташованої в області D,

$$\int\limits_L (Pdx + Qdy + Rdz) = U(B) - U(A),$$

де A - початкова, а B - кінцева точка шляху інтегрування. Тоді функцію $U(x,y,z)$ можна знайти за формулою

$$U(x,y,z) + C = \int\limits_{M_0M} dU = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x,y,z)dz,$$

де (x_0, y_0, z_0) - довільна точка області D.

Якщо вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ - повний диференціал у деякій однозв'язній області D, то криволінійний інтеграл по будь-якому замкненому контуру L дорівнює нулю і навпаки.

г) *Зв'язок між криволінійним і подвійним інтегралом*. Якщо L – кусково-гладкий замкнений контур, що обмежує область D, орієнтований так, що при обході L область D залишається ліворуч, а функції $P(x,y)$ і $Q(x,y)$ – неперервні разом зі своїми частинними похідними першого порядку в замкненій області D, то має місце *формула Гріна*:

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{(D)} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy.$$

3) *Застосування криволінійного інтеграла 2-го роду.*

а) Площа плоскої фігури, обмеженої кривою L,

$$S = \frac{1}{2} \oint\limits_L xdy - ydx.$$

б) Робота, здійснена змінною силою $\vec{F}(P,Q,R)$ уздовж шляху L:

$$W = \int\limits_L Pdx + Qdy + Rdz \,.$$

13.2.1. Приклади обчислення криволінійних інтегралів 2-го роду

Приклад. Обчислити $\int\limits_L x^2dx + \dfrac{dy}{y^2}$, де L- дуга кривої $x = \dfrac{1}{y}$ від точки $A(4, 1\!/\!_4)$ до $B(1,1)$.

Розв′язання. З рівняння кривої $y = \dfrac{1}{x}$, $y' = -\dfrac{1}{x^2}$. Змінна x відіграє роль параметра. Початковій точці кривої відповідає $x = 4$, кінцевій – $x = 1$:

$$\int\limits_L x^2dx + \frac{dy}{y^2} = \int\limits_4^1 x^2dx - \frac{1}{x^2}x^2dx = \int\limits_4^1 (x^2 - 1)dx = -18 \,.$$

Приклад. Обчислити $\int\limits_L ydx + xdy$, де L – дуга астроїди $x = a\cos^3 t$, $y = a\sin^3 t$, що пробігається від $A(a,0)$ до $B(0,a)$.

Розв′язання. Знайдемо:

$dx = -3a\sin t\cos^2 t dt$, $\qquad dy = 3a\sin^2 t\cos t dt$,

$$ydx + xdy = -3a^2\sin^4 t\cos^2 tdt + 3a^2\cos^4 t\sin^2 tdt =$$

$$= 3a^2\sin^2 t\cos^2 t(\cos^2 t - \sin^2 t)dt = \frac{3}{4}a^2\sin^2 2t\cos 2tdt.$$

Початковій точці шляху відповідає $t = 0$, кінцевій – $t = \dfrac{\pi}{2}$, тоді

$$\int\limits_L ydx + xdy = \frac{3}{4}a^2\int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 2t\cos 2tdt = \frac{3}{8}a^2\left.\frac{\sin^3 2t}{3}\right|_0^{\pi/2} = 0.$$

Приклад. Обчислити $\int\limits_L y^2dx + x^2dy + z^2dz$, де L – відрізок прямої у просторі від точки $A(1,0,2)$ до $B(3,1,4)$.

Розв′язання. Складемо рівняння прямої, що проходить через точки A і B:

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-2}{2} = t \,.$$

Одержимо параметричні рівняння прямої: $\begin{cases} x = 2t+1, & dx = 2dt; \\ y = t, & \Rightarrow\ dy = dt; \\ z = 2t+2. & dz = 2dt. \end{cases}$

Параметр змінюється в межах $t_A \le t \le t_B$, тобто $0 \le t \le 1$, тоді

$$\int_L y^2dx + x^2dy + z^2dz = \int_0^1 2t^2dt + (1+2t)^2dt + (2t+2)^2 2dt = \frac{71}{3}.$$

Приклад. Знайти площу еліпса $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1.$

Розв′язання. Перейдемо до параметричних рівнянь $x = a\cos t; y = b\sin t$. Додатному обходу контуру відповідає зміна параметра t від 0 до 2π, тоді

$$S = \frac{1}{2}\int_L xdy - ydx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a\cos tb\cos tdt + b\sin ta\sin tdt = \frac{1}{2}ab\int_0^{2\pi} dt = \frac{ab}{2}2\pi = \pi ab.$$

Приклад. Перевірити, що даний вираз є повним диференціалом функції $u(x, y)$, і знайти цю функцію: $(1-\sin 2x)dy - (3+2y\cos 2x)dx = P(x,y)dx + Q(x,y)dy$.

Розв′язання. Знайдемо: $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -2\cos 2x; \dfrac{\partial Q}{\partial x} = -2\cos 2x$.

Оскільки $\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}$, то вираз $P(x,y)dx + Q(x,y)dy$ є повним диференціалом функції $u(x, y)$. Знайдемо цю функцію, приймаючи $x_0 = 0; \quad y_0 = 0$:

$$u(x,y) = \int_{x_0}^{x} P(x, y_0)dx + \int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy + C = \int_0^x -3dx + \int_0^y (1-\sin 2x)dy + C =$$

$$= -3x + (1-\sin 2x)y + C.$$

Приклад. Обчислити $\oint_L - x^2ydx + xy^2dy$, де L – коло $x^2 + y^2 = a^2$, що пробігається в додатному напрямку.

Розв′язання. Маємо $P(x,y) = -x^2y; \quad Q(x,y) = xy^2$; $\dfrac{\partial P}{\partial y} = -x^2; \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x} = y^2$.

Оскільки функції $P(x,y), \quad Q(x,y), \quad \dfrac{\partial P}{\partial y}, \quad \dfrac{\partial Q}{\partial x}$ – неперервні в області D, обмеженій колом L, застосуємо формулу Гріна:

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_{(D)}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy; \oint_L - x^2ydx + xy^2dy = \iint_{(D)}\left(y^2 + x^2\right)dxdy.$$

У подвійному інтегралі перейдемо до полярних координат, тому що область інтегрування D – це круг $x^2 + y^2 \le a^2$:

$$x = \rho\cos\varphi; \quad y = \rho\sin\varphi; \quad x^2 + y^2 = a^2 = \rho^2;$$

$$\iint_D \left(x^2+y^2\right)dxdy=\iint_D \rho^2\rho d\rho d\varphi=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^a\rho^3 d\rho=\frac{a^4}{4}2\pi=\frac{\pi a^4}{2}.$$

Приклад. Знайти функцію за повним диференціалом: $du=\dfrac{2(zxdy+xydz-yzdx)}{(x-yz)^2}$.

Розв′язання. Щоб знайти $u(x,y,z)$, проінтегруємо цей вираз уздовж ламаної M_0ABM, відрізки якої паралельні координатним осям, обравши початкову точку в $M_0(1,0,0)$:

$$u(x,y,z)=\int\limits_{M_0M}du=\int\limits_{M_0A}du+\int\limits_{AB}du+\int\limits_{BM}du.$$

Обчислимо кожний інтеграл окремо.

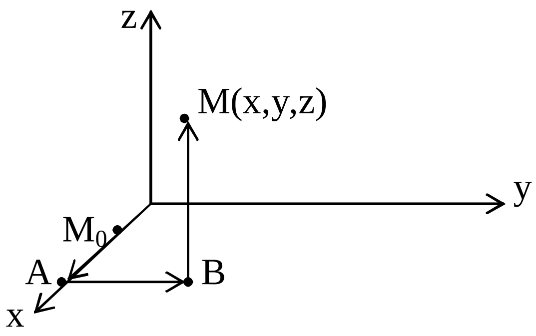

Рис. 13.3

Рівняння лінії M_0A: $y=0,\quad z=0\ \Rightarrow \displaystyle\int\limits_{M_0A}\frac{2(zxdy+xydz-yzdx)}{(x-yz)^2}=0.$

Рівняння лінії AB: $x=const,\quad z=0\ \Rightarrow \displaystyle\int\limits_{AB}\frac{2(zxdy+xydz-yzdx)}{(x-yz)^2}=0.$

Рівняння лінії BM: $x=const,\quad y=const\ \Rightarrow \displaystyle\int\limits_{BM}\frac{2(zxdy+xydz-yzdx)}{(x-yz)^2}=$

$$=2\int_0^z\frac{xydz}{(x-yz)^2}=-2x\int_0^z\frac{d(x-yz)}{(x-yz)^2}=\frac{2x}{(x-yz)}\bigg|_0^z=\frac{2x}{x-yz}+C.$$

Отже, $u(x,y,z)=\dfrac{2x}{x-yz}+C$.

Список літератури

1. Архипова Е.С., Болотина Л.В. Методические указания и контрольные задания по теме «Сходимость числовых рядов» по курсу высшей математики. Харьков, ХПИ, 1984, 14 с.

2. Архипова Е.С., Ажиппо Л.А. Методические указания и контрольные задания по теме «Кратные интегралы». Харьков, ХПИ, 1988, 20 с.

3. Архипова Е.С., Ажиппо Л.А. Методические указания к типовым расчетам и варианты контрольных заданий по теме «Приложение производных к построению графиков функций, заданных параметрически» Харьков, ХПИ, 1990, 21 с.

4. Курпа Л.В, Архипова Е.С., Корниль Т.Л. Высшая математика. Общий курс. Харьков, ХГПУ,1997,173 с.

5. Курпа Л.В, Архипова Е.С., Корниль Т.Л. Учебное пособие и контрольные задания по курсу высшей математики для студентов экономических специальностей. Харьков, ХГПУ, 1998, 170 с.

6. Архипова Е.С., Курпа Л.И. Ряды. Учебно-методическое пособие для студентов инженерно-физических, машиностроительных и экономических специальностей. Харьков, ХГПУ, 1999, 79 с.

7. Курпа Л.В., Архипова Е.С. и др. Математика для экономистов. Решение задач и варианты индивидуальных заданий. Харьков, ХГПУ, 1999, 333 с.

8. Курпа Л.В., Архипова Е.С. и др. Высшая математика. Решение задач и варианты типовых расчетов. Часть 1. Харьков, ХГПУ, 1999, 287 с.

9. Курпа Л.В., Архипова Е.С. и др. Высшая математика. Решение задач и варианты типовых расчетов. Часть 2. Харьков, ХГПУ, 1999, 279 с.

10. Курпа Л.В., Архіпова О.С. та інші. Вища математика. Розв'язання задач та варіанти типових розрахунків. Том 1. Харків, НТУ „ХПІ", 2002, 315 с.

11.. Курпа Л.В., Архіпова О.С. та інші. Вища математика. Розв'язання задач та варіанти типових розрахунків. Том 2. Харків, НТУ „ХПІ" 2002, 311 с.

12. Архіпова О.С., Курпа Л.В. та інші. Higher mathematics. Problem solving and variants of typical calculations. Volume 1. Kharkiv, NTU «Khpi».2004, 316 с.
13. Архіпова О.С., Курпа Л.В. та інші. Higher mathematics. Problem solving and variants of typical calculations. Volume 2. Kharkiv, NTU «Khpi».2004, 305 с.
14. Торкатюк В.И., Шутенко Л.Н., Стадник Г.В., Колосов А.И., Архипова Е.С.,Протопопова В.П. и др. Математический аппарат и методы формирования оптимальных параметров управления процессом функционирования строительного предприятия. Монография. Харьков, 2007, 827 с.
15. Головина Л.И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения. – М : Наука, 1971.
16. Бугров Я.С., Никольский С.М. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – М : Наука, 1960.
17. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Линейная алгебра. – М : Наука, 1984.
18. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Аналитическая геометрия. – М : Наука, 1988.
19. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Вып. 1. – М : Наука, 1967.
20. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа. Ч. 2. – М : Наука, 1973.
21. Боревич В.И. Определители и матрицы. – М : Наука, 1970.
22. Цубербиллер О.Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии. М : Физматгиз, 1958.
23. Рублев А.Н. Линейная алгебра. – М : Высш. шк., 1968.
24. Клетеник Д.В. Сборник задач по аналитической геометрии. – М : Наука, 1969.
25. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. – М : Физматгиз, 1959. – Т.1,2,3.
26. Игнатьева А.В., Краснощекова Т.И., Смирнов В.Ф. Курс высшей математики. – М : Высш. шк., 1964.

27. Тер-Крикоров А.М., Шабунин М.И. Курс математического анализа. – М : Наука, 1988.
28. Овчинников П.Ф., Яремчук Ф.П., Михайленко В.М. Высшая математика /Под ред. П.Ф. Овчинникова. – К : Вища шк., 1987.
29. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление для втузов. – М: Наука, 1985. – Т.1,2.
30. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1956.
31. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа. – М : Наука, 1985.
32. Кузнецов Л.А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты). Учебное пособие для втузов. – М : Высш. шк., 1983.
33. Тевяшев А.Д., Литвин А.Г. Высшая математика. Общий курс. Сборник задач и упражнений. – Харьков : Рубикон, 1999.
34. Высшая математика для экономистов. /Под ред. Н.Ш.Кремера – М: ЮНИТИ, 1997.